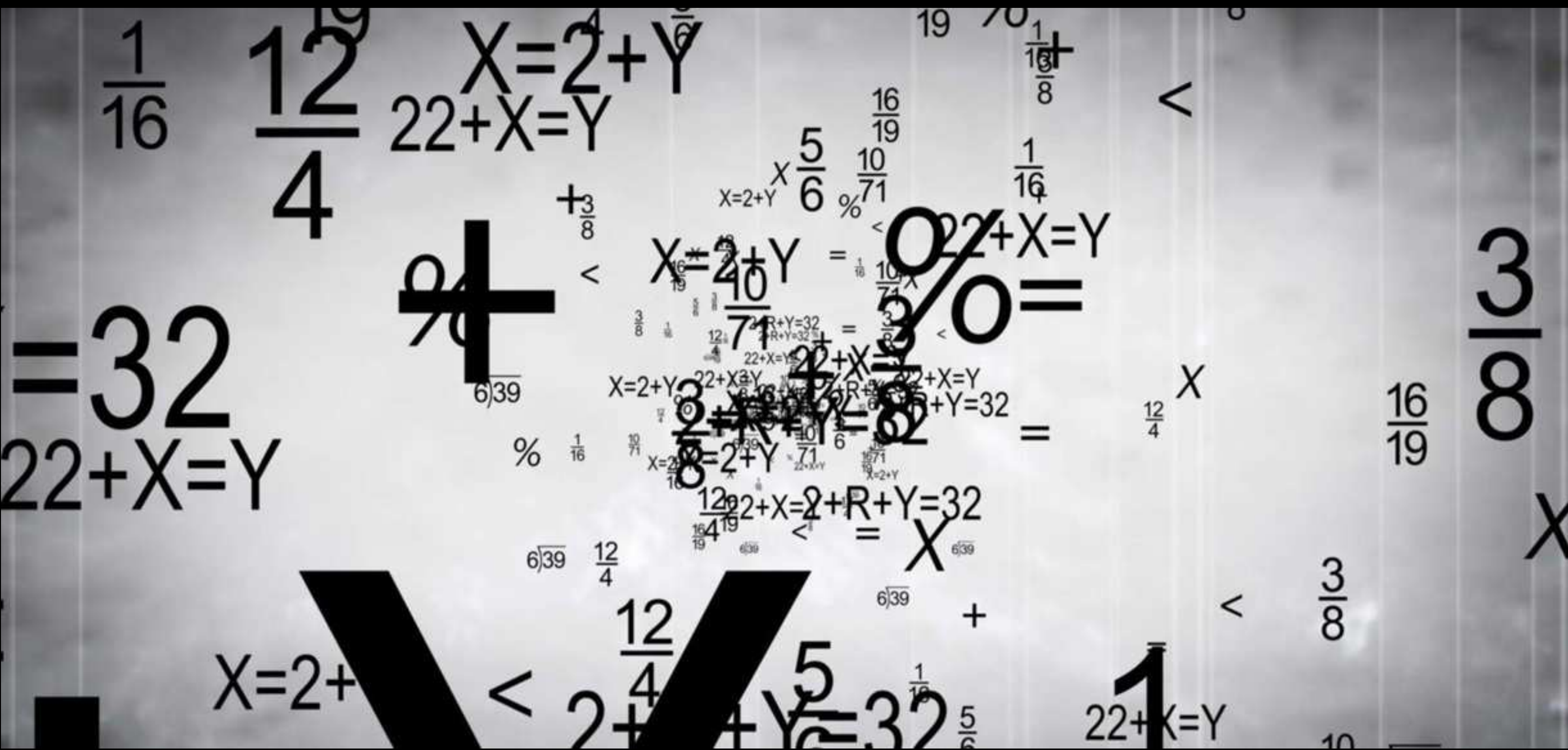
José Sérgio Domingues
Francielly dos Santos Bento
Tabatha Helena da Silva

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA ELEMENTAR



Departamento de Matemática
Instituto Federal de Minas Gerais - IFMG Campus Formiga

INSTITUTO FEDERAL
MINAS GERAIS
Campus Formiga

INTRODUÇÃO À ÁLGEBRA ELEMENTAR

José Sérgio Domingues
Francielly dos Santos Bento
Tabatha Helena da Silva

Departamento de Matemática - IFMG Campus Formiga

sergio.domingues@ifmg.edu.br

Junho, 2016

Introdução à álgebra elementar

Revisores técnicos:
Profa. Lúcia Helena Costa Braz
Prof. Alex Eduardo Andrade Borges
Prof. Nícias José de Carvalho

Capa:
Roger Santos Ferreira

Ilustrações:
Prof. José Sérgio Domingues

Ficha Catalográfica

Domingues, José Sérgio
Introdução à álgebra elementar / José Sérgio Domingues; Francielly dos Santos Bento; Tabatha Helena da Silva. – Formiga: IFMG Campus Formiga, 2016.

Bibliografia.
ISBN 978-85-67593-06-7.

1. Álgebra elementar. I. Título

Apresentação

A ideia original de escrever esse livro veio do fato de que a disciplina denominada *Introdução à Álgebra*, para alunos do primeiro período do curso de Licenciatura em Matemática do IFMG - Campus Formiga, não possuía uma bibliografia única que contemplasse todos os conteúdos da sua ementa. Isso gerava muitos incômodos para professores que a ministravam e também para os alunos, pois era necessário a utilização de muitos livros, cujas linguagens e níveis eram bem diferentes.

Essa disciplina tem como principal objetivo rever de forma qualitativa alguns importantes tópicos de álgebra já estudados no ensino médio pelos acadêmicos, mas trazendo uma teoria que já contenha a justificativa de alguns resultados por meio de demonstrações e que essas também comecem a ser feitas pelos próprios estudantes.

O livro é parte fundamental de um projeto de extensão desenvolvido em nosso campus de março de 2015 a junho de 2016, com a finalidade de estudar os conteúdos da disciplina com acadêmicos do curso de matemática e também, disseminar a utilização do sistema de editoração de textos LaTeX (para a comunidade interna e externa ao IFMG), que foi o sistema utilizado na confecção deste material, com a classe abnTeX2.

Boa parte dos conteúdos abordados no livro são baseados nas notas de aula dessa disciplina, quando a ministrei nos anos de 2014 e 2015, sendo que as mesmas foram ampliadas e revistas. Além disso, teve-se uma grande ampliação no número de exercícios apresentados aos alunos, sendo que, no total, o material aqui disponibilizado conta com **310 exercícios**.

No Capítulo 1 são apresentadas algumas das principais técnicas de demonstração matemática baseadas em princípios de lógica, além da apresentação de uma tabela com os símbolos matemáticos mais utilizados em todo o livro. Ele não tem a mínima intenção de ser considerado como um curso de lógica ou de técnicas de demonstração, sendo simplesmente uma descrição sucinta desses temas, de forma que os acadêmicos tenham pelo menos uma visão geral de alguns princípios de lógica e de demonstração, além da oportunidade de já se familiarizarem com os principais símbolos matemáticos usados ao longo do texto.

O Capítulo 2 apresenta uma visão geral da teoria de conjuntos, em particular a dos conjuntos numéricos. Esse capítulo é provavelmente o que mais envolve atividades de demonstrações para os acadêmicos, além de apresentar a utilização mais densa de notações e símbolos matemáticos, de forma a auxiliar o acadêmico a se tornar mais capaz de utilizá-los na resolução de problemas e demonstrações.

Uma revisão detalhada sobre potenciação e radiciação é feita no Capítulo 3, sendo que muitos detalhes sobre os resultados são destacados no texto, com a finalidade de que os acadêmicos não façam confusão entre os resultados ou que generalizem resultados de maneira equivocada.

O Capítulo 4 descreve de forma simplificada o conjunto dos números complexos, apresentando a definição deste conjunto e algumas de suas propriedades. Com isso, tem-se base para o entendimento do Capítulo 5, onde são estudados os polinômios e suas características, sendo que suas raízes, e/ou coeficientes, podem ser complexos.

No Capítulo 6 é feito o estudo das expressões algébricas e fracionárias, suas classificações, mínimo múltiplo comum entre essas expressões e suas principais operações, formas de fatoração de expressões algébricas inteiras, além da simplificação de frações algébricas.

Uma descrição sobre matrizes é feita no Capítulo 7, sendo que o primeiro contato é feito pela utilização prática da ideia de matriz para registrar um conjunto de dados de uma avaliação física. Em seguida, a definição detalhada de matriz é feita, suas principais propriedades são apresentadas, assim como seus principais tipos e operações.

O Capítulo 8 é dedicado ao estudo dos sistemas lineares, onde são exibidos a definição de um sistema linear, sua representação matricial, interpretação geométrica para sistemas de 2 incógnitas e três métodos de resolução, que são: substituição, Gauss e Gauss-Jordan.

No Capítulo 9 apresentamos a regra de Sarrus e o Teorema de Fundamental de Laplace para obtenção de determinantes, incluindo as principais propriedades do determinante. Além disso, é dado o conceito de matriz inversa, são discutidas duas formas de obtenção desse tipo de matriz e apresentadas algumas de suas propriedades.

Finalizamos com o Capítulo 10, onde exibimos as respostas de praticamente todos (dos muitos) exercícios disponibilizados ao final de cada capítulo do livro, sendo que, para vários deles, também são disponibilizadas algumas dicas de resolução.

Enfim, esse livro, por apresentar muitos temas geralmente estudados nos ensinos fundamental e médio, pode ser utilizado por professores não apenas do ensino superior, em disciplinas mais introdutórias, como é o caso de *Introdução à Álgebra* no IFMG - Campus Formiga, mas também na educação básica, onde caberá ao professor, saber dosar o que é realmente necessário ser apresentado aos alunos, dependendo da maturidade das turmas e dos currículos de cada uma delas.

Peço a gentileza de que caso erros sejam encontrados nesse material ou sugestões de alterações sejam necessárias, enviem mensagem para o endereço

sergio.domingues@ifmg.edu.br

que terei prazer em analisar o que foi solicitado, corrigir eventuais erros e efetuar alterações na medida do possível.

José Sérgio Domingues

Agradecimentos

Agradecemos ao IFMG - Campus Formiga, em especial à Secretaria de Extensão, Pesquisa e Pós-Graduação (SEPPG), pela grande aceitação do projeto de extensão que deu origem tanto a esse material quanto ao curso de introdução ao sistema LaTeX, que contribuiu significativamente para o crescimento acadêmico de muitas pessoas da comunidade interna e externa ao campus.

Para que o livro tomasse esse formato foram necessárias várias discussões com alunos e professores do IFMG Campus Formiga, sendo que alguns deles tiveram papel de destaque na revisão do texto final desse material. Por isso, agradecemos imensamente à Professora Lúcia Helena Costa Braz, ao Professor Alex Andrade Eduardo Borges e ao Professor Nícias José de Carvalho, por terem feito a revisão técnica desse livro, sugerindo importantes alterações e correções técnicas no texto.

A imagem e estrutura da capa foram idealizadas por Róger Santos Ferreira, ao qual também agradecemos imensamente.

Agradecemos também, ao Diretor de Ensino do campus, Prof. Dr. Miguel Rivera Peres Júnior, pelo empenho em nos direcionar para uma forma de registro desse material.

Finalizando, agradecemos à equipe do NIT (Núcleo de Inovação Tecnológica) do IFMG, pela grande responsabilidade com que conduziu o processo de registro deste livro.

Os autores

Sumário

CAPÍTULO 1

Introdução às Técnicas de Demonstração

1.1 Introdução ao raciocínio lógico matemático

Pensar logicamente é muito mais importante do que se imagina, principalmente quando se trata de ciência. No nosso dia a dia o raciocínio lógico é, geralmente, deixado de lado. Veja uma frase obtida na embalagem de sorvete:

Temperatura de conservação: $-10°C$*, ou mais.*

Ora, à luz da lógica, manter o sorteve a $-10°C$ (ou mais), significa que valores acima de $-10°C$ são aceitos, como por exemplo, $-5°C$, $0°C$, $10°C$ ou até mesmo $200°C$, já que $200 > -10$, o que é, claramente, um absurdo!

Nesse caso, o fabricante não observou que o certo seria que a temperatura de conservação deveria ser: $-10°C$, ou menos.

Como já foi mencionado, erros desse tipo podem ser de grande prejuízo à ciência, e por isso, nesse capítulo, descreveremos (mesmo que de forma sucinta) os princípios básicos do raciocínio lógico matemático, que são muito úteis para o entendimento dos próximos capítulos.

Nessa seção vamos nos dedicar ao entendimento do conceito de proposição e suas propriedades.

Proposição

Entende-se como **proposição**, qualquer sentença declarativa, expressa por palavras ou símbolos, e que deve exprimir um pensamento de sentido completo.

Exemplo 1.1

a) Mercúrio é o planeta mais próximo do Sol.

b) A lua é feita de queijo.

c) $2 + 9 = 11$.

d) A área de um retângulo de lados a e b é ab.

e) $a^2 > 0$ para todo número inteiro a.

Dizemos que uma proposição tem **valor lógico verdadeiro**, simbolizando por V, quando ela for verdadeira. Quando ela for falsa, dizemos que ela tem **valor lógico falso** e simbolizaremos por F.

Dois princípios fundamentais são adotados como regras na lógica matemática:

1. **Princípio da Não Contradição:** Uma proposição não pode ter valor lógico V e F simultaneamente.

2. **Princípio do Terceiro Excluído:** Toda proposição ou tem valor lógico V ou valor lógico F, não havendo uma terceira possibilidade.

Com base nos princípios fundamentais, pode-se concluir que toda proposição admite um único valor lógico: V ou F.

Exemplo 1.2 *Vejamos algumas proposições e seus respectivos valores lógicos.*

a) $4 < 7$ (V)

b) Dois é um número inteiro. (V)

c) $11 \neq 11$ (F)

d) Treze é um número par. (F)

e) 3 é um divisor de 11. (F)

f) BH tem menos de 5000 habitantes. (F)

g) $2+1$ é 5. (F)

h) Todos os números inteiros são pares. (F)

Definição 1.1 (Proposição simples) *É aquela que não possui outra proposição como parte de si mesma.*

As proposições simples são geralmente representadas com letras minúsculas do nosso alfabeto.

Exemplo 1.3

a) p : 12 é primo.

b) q : O carro é branco.

Definição 1.2 (Proposição Composta) *É uma proposição formada pela junção de duas ou mais proposições, por meio dos conectivos e* $(\wedge)$, *ou* $(\vee)$ *e se...então* $(\longrightarrow)$.

As proposições compostas são geralmente representadas com letras maiúsculas do nosso alfabeto.

Exemplo 1.4

a) $R = p \wedge q$: 12 é primo e o carro é branco.

b) $S = p \vee q$: 12 é primo ou o carro é branco.

c) $T = q \longrightarrow q$: Se 12 é primo, então o carro é branco.

Observação 1.1 *O conectivo OU não possui sentido exclusivo. Por exemplo, na afirmação: "Meu amigo estuda matemática ou biologia", pode ser que esse amigo estude apenas matemática ou apenas biologia ou até mesmo, que estude ambas. De maneira geral, a proposição "p ou q" significa "**p ou q ou ambos**". Dessa forma, para que o valor lógico de uma proposição composta gerada por esse conectivo tenha valor lógico V, basta que uma das proposições que a compõem tenha valor V.*

Exemplo 1.5 *Proposições compostas geradas pelo conectivo E nas letras* a), b) *e* c) *e pelo conectivo OU nas letras* d), e) *e* f), *todas com seus respectivos valores lógicos.*

a) $p:\ 5>2$ (V), $q:\ 2\neq 4$ (V), $p\wedge q:\ 5>2\ \text{ e }\ 2\neq 4.$ (V)

b) $p:\ -2<1$ (V), $q:\ (-2)^2<(-1)^2$ (F), $p\wedge q:\ -2<-1\ \text{ e }\ (-2)^2<(-1)^2.$ (F)

c) $p:\ 3>7$ (F), $q: 5$ é par (F), $p\wedge q:\ 3>7\ \text{ e }\ 5$ é par. (F)

d) $p: 7$ é par. (F), $q: 8$ é ímpar. (F), $p\vee q:\ 7$ é par ou 8 é ímpar. (F)

e) $p:\ (-1)^2>(-2)^2$ (F), $q:\ 4>1$ (V), $p\vee q:\ (-1)^2>(-3)^2$ ou $4>1.$ (V)

f) $p: 9$ é quadrado perfeito. (V), $q:\ 5+1=3\cdot 2.$ (V), $p\vee q: 9$ é quadrado perfeito ou $5+1=3\cdot 2.$ (V)

Os casos a), b) e c) apresentados no Exemplo 1.5 ilustram os seguintes fatos:

- Se p e q tem valores lógicos V, $p\wedge q$ também terá.
- No caso onde um dos valores lógicos for F, $p\wedge q$ terá valor lógico F.
- Se p e q tiverem valores lógicos F, então $p\wedge q$ também terá.

Em outras palavras, o valor lógico de $p\wedge q$ será V apenas quando p e q também forem V, pois o conectivo E significa que obrigatoriamente as duas proposições precisam acontecer.

Já os casos d), e) e f) ilustram que para o valor lógico de $p\vee q$ ser V, pelo menos uma das proposições deve ter valor lógico V.

Os possíveis casos para $p\wedge q$ e $p\vee q$ podem ser vistos na Tabela 1, denominada de **tabela verdade**.

Tabela 1 – Tabela verdade para os casos $p\wedge q$ (p e q) e $p\vee q$ (p ou q).

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Definição 1.3 (Negação) *Seja p uma proposição qualquer. A proposição "não p" (indicada por ~p), é a negação de p e tem valor lógico contrário ao de p.*

Exemplo 1.6 *Exemplos de algumas proposições e suas negações.*

a) $p: \sqrt{4}=2$ (V) $\sim p: \sqrt{4}\neq 2$ (F)

b) $p: 80$ é ímpar. (F) $\sim p: 80$ é par (V)

c) $p: 2 > 1$ (V) $\sim p: 2 \leq 1$ (F)

d) p : Todo número primo é par. (F) $\sim p$: Existe algum número primo ímpar. (V)

e) $p: x + 10 > x + 4\ \forall\ x$ natural.(V) $\sim p: x + 10 \leq x + 4$ para algum x natural. (F)

f) p : Mercúrio não é um planeta. (F) $\sim p$: Mercúrio é um planeta. (V)

Observação 1.2 *Atente para o fato de que a negação apenas da expressão "para todo" é a expressão "para algum" e a negação apenas de "para algum" é "para todo". Um exemplo disso é visto nos itens d) e e) do Exemplo 1.6.*

Exemplo 1.7 *Obtenha a negação das proposições compostas:*

a) P : A meia é azul E o tênis é preto. $\sim P$: A meia não é azul OU o tênis não é preto.

b) $Q: x = -2$ OU $x = 3$. $\sim Q: x \neq -2$ E $x \neq 3$.

Observação 1.3 *Pelo Exemplo 1.7 percebe-se que a* ***negação de E é OU*** *e que a* ***negação de OU é E****. Contudo, observe que, para negar a proposição composta também é necessário negar as proposições que a compõem. Para o item b), por exemplo, foi necessário, além de negar o OU com o E, também negar $x = 2$ e $x = 3$ com $x \neq -2$ e $x \neq 3$.*

A ideia apresentada na Observação 1.3 faz parte das chamadas **Leis de De Morgan** da lógica, representadas simbolicamente como:

$$\sim (P\ e\ Q) = (\sim P)\ ou\ (\sim Q) \qquad \sim (P\ ou\ Q) = (\sim P)\ e\ (\sim Q).$$

Proposição Condicional

Uma proposição do tipo "se p então q" (representada por: $p \longrightarrow q$) é denominada ***proposição condicional***, ou simplesmente, ***condicional***. Em uma condicional o valor lógico será F apenas quando os valores lógicos de p e q forem V e F, respectivamente. Sendo assim, para qualquer outra situação o valor lógico da condicional será V.

Exemplo 1.8 *Exemplos de proposições condicionais a partir de duas proposições, p e q, com seus respectivos valores lógicos.*

a) $p: 2 > 1$. (V), $q: 4 > 3$. (V), $p \longrightarrow q$: Se $2 > 1$, então $4 > 3$. (V)

b) $p: 6 < 2$. (F), $q: 3 \neq 3$. (F), $p \longrightarrow q$: Se $6 < 2$, então $3 \neq 3$. (V)

c) $p: 5 \neq 8$. (V), $q: 3 < 2$. (F), $p \longrightarrow q$: Se $5 \neq 8$, então $3 < 2$. (F)

d) $p: 1 - 2 = 1$. (F), $q: 7 > 6$. (V), $p \longrightarrow q$: Se $1 - 2 = 1$, então $7 > 6$. (V)

A tabela verdade de uma proposição condicional também pode ser montada, conforme se vê na Tabela 2.

Tabela 2 – Tabela verdade para uma proposição condicional $p \longrightarrow q$ (Se p então q).

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Definição 1.4 (Hipótese e Tese) *Em uma condicional $p \longrightarrow q$, a parte p é denominada **hipótese** e a parte q é a **tese**, que muitas vezes são representadas nas formas resumidas **H** e **T**, respectivamente.*

Exemplo 1.9 *Seja a condicional:*

"Se x representa um número inteiro negativo, então $-1 \cdot x$ é positivo."

Então tem-se que:

- (H): *x representa um número inteiro negativo;*
- (T): *$-1 \cdot x$ é positivo.*

Outra proposição condicional que pode ser formada a partir de $p \longrightarrow q$ é a sua **recíproca**, dada por: $q \longrightarrow p$, isto é, "Se q então p". No Exemplo 1.9 a recíproca da proposição apresentada será

Se $-1 \cdot x$ é positivo, então x representa um número inteiro negativo.

Proposição Bicondicional

Quando se faz a junção de uma condicional e a sua recíproca, tem-se a chamada ***proposição bicondicional***, ou simplesmente, ***bicondicional***. Ela é representada por $p \longleftrightarrow q$ (lê: "p se, e somente se, q"). Vejamos um exemplo:

Exemplo 1.10 *Considere a proposição:*

"x é par se, e somente se, x é divisível por 2."

Nela, pode-se considerar as proposições $p: x$ é par, e $q: x$ é divisível por 2. Logo, ela é equivalente a $p \longleftrightarrow q$, que pode ser pensada como:

- *($p \longrightarrow q$) Se x é par, então x é divisível por 2, e*
- *($q \longrightarrow p$) Se x é divisível por 2, então x é par.*

Uma bicondicional $p \longleftrightarrow q$ terá valor lógico V quando p e q tiverem valores iguais e terá valor lógico F quando os valores lógicos de p e q forem diferentes. A Tabela 3 é a tabela verdade de uma bicondicional.

Tabela 3 – Tabela verdade para $p \longleftrightarrow q$ (p se, e somente se, q).

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplo 1.11 *Vejamos alguns exemplos de bicondicionais e seus valores lógicos.*

a) $p: \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. (F) e $q: -1 \in \mathbb{N}$. (F). Logo:

$$p \longleftrightarrow q: \sqrt{3} \in \mathbb{Q} \text{ se, e somente se, } -1 \in \mathbb{N}. \text{ (V)}$$

b) $p: \sqrt{5} \in \mathbb{I}$. (V) e $q: 1 \in \mathbb{N}$. (V). Logo:

$$p \longleftrightarrow q: \sqrt{5} \in \mathbb{I} \text{ se, e somente se, } 1 \in \mathbb{N}. \ (V)$$

c) $p: 4 > 1$. (V) e $q: 7 \neq 7$. (F). Logo:

$$p \longleftrightarrow q: 4 > 1 \ se, \ e \ somente \ se, \ 7 \neq 7. \ (F)$$

d) $p: \sqrt{9} = -3$. (F) e $q: 8 - 1 = 7$. (V). Logo:

$$p \longleftrightarrow q: \sqrt{9} = -3 \ se, \ e \ somente \ se, \ 8 - 1 = 7. \ (F)$$

O símbolo de implicação ($\Longrightarrow$)

Considere duas proposições p e q. Diremos que a proposição p implica a proposição q, quando o valor lógico da condicional $p \longrightarrow q$ for V, ou seja, quando não ocorrer o caso onde os valores de p e q são V e F, respectivamente. Nesse caso, a notação será:

$$p \Longrightarrow q$$

que também pode ser lida das formas “Se p, então q.” e “p implica q”, como é o caso dos itens a), b) e d) do Exemplo 1.8.

O símbolo de equivalência ($\Longleftrightarrow$)

Quando o valor lógico da condicional $p \longleftrightarrow q$ for V, isto é, quando os valores lógicos de p e q forem iguais, diremos que a proposição p é equivalente à proposição q. A notação utilizada será

$$p \Longleftrightarrow q$$

que pode ser lida como “p, se e somente se, q.” ou “p é equivalente a q”. Os itens a) e b) do Exemplo 1.11 representam proposições equivalentes.

Os símbolos de implicação e equivalencia são muito utiliados na representação de diversos tipos de teoremas, como veremos na Seção 1.4, pois nesses casos, sabe-se que os resultados apresentados são verdadeiros, o que confere o valor lógico V às proposições compostas que formam os teoremas.

Nesse capítulo, apenas os conceitos e resultados estudados até aqui já darão bom subsídio para o entendimento dos tópicos apresentados nos próximos capítulos, especialmente no que se refere à criação de uma capacidade demonstrativa de resultados matemáticos. Contudo, mais detalhes e resultados sobre Lógica Matemática podem ser obtidos em nossas referências [1, 2, 3, 4].

1.2 Axiomas e tipos de Teorema

Muitas ciências importantes como a Química, Física e Biologia, denominadas exatas empíricas, fazem algumas de suas demonstrações por meio de observações experimentais e testes. Esse não é o caso da Matemática, onde observações experimentais servem, apenas, para "indicar" ou "nos questionar" se determinado conjunto apresenta uma certa propriedade, mas isso **não é aceito** como demonstração.

Como exemplo, observe a sequência de igualdades:

$$4 = 2+2,\ 6 = 3+3,\ 8 = 3+5,\ 10 = 5+5,\ 12 = 5+7,\ 14 = 7+7,\ 16 = 5+11,\ 18 = 7+11$$

Nela, percebe-se que todos os números pares maiores que 2 e menores ou iguais a 18, foram escritos como soma de dois números primos[i]. Se continuarmos a pegar os próximos números pares maiores que 18, veremos que é possível escrevê-los, também, como soma de dois primos. Isso "indica" que:

Todo número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos.
(Conjectura de Goldbach)

O termo "indica" significa que essa propriedade talvez seja verdadeira, pois para todos os casos testados até um determinado valor, ela funcionou. Contudo, como existem infinitos números pares maiores que 2, para que se tenha certeza que esse resultado é sempre verdadeiro, é necessário demonstrar que qualquer um desses infinitos números pode ser escrito como soma de dois primos.

É claro que, como o conjunto de valores a serem testados é infinito, nesse caso, não é possível testar todos da forma como foi feito na sequência de igualdade acima. Isso significa, que para se demonstrar esse resultado é necessário se pensar em uma forma que possibilite provar a propriedade para todos os casos possíveis, sem ter que considerar número por número.

Saber demonstrar que alguns resultados são verdadeiros, ou procurar formas de demonstrar que alguns são falsos é de extrema importância na matemática, mesmo que o resultado pareça obviamente verdadeiro, ou falso. Aliás, tome cuidado com isso, pois muitas vezes você pode se deparar com um resultado que aparentemente é verdadeiro, mas que na realidade pode ser falso. Um ótimo exemplo para ilustrar esse fato é a proposição:

O conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, *possui mais elementos do que o conjunto dos números pares positivos,* $P = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$.

Apesar da proposição anterior aparentar, obviamente, ter o valor lógico V, é possível utilizar um resultado matemático, relativo à bijeção de funções, para provar que, na realidade, seu valor lógico é F e que esses dois conjuntos possuem a mesma quantidade de elementos. Mais detalhes em [7, p. 9-10].

Sendo assim, é necessário não se deixar levar pelas aparências de que uma proposição deve ser obviamente verdadeira ou falsa.

Para se poder pensar em como se fazer uma determinada demonstração, é necessário, antes de tudo, conhecer as principais técnicas demonstrativas, e esse será o principal

[i] Números inteiros positivos maiores do que 1 e com exatamente dois divisores: 1 e ele mesmo. Mais detalhes sobre esses números podem ser obtidos em [5, 6].

objetivo da Seção 1.4. Antes disso, apresentamos algumas definições importantes e uma tabela com os principais símbolos matemáticos usados nesse texto.

Definição 1.5 (Axioma) *É uma proposição que se assume como verdadeira e que não precisa de prova.*

Os axiomas e definições teóricas são usados para demonstrar vários resultados: Teoremas, Proposições, Corolários e Lemas.

Definição 1.6 (Teorema) *É uma proposição que pode ser demonstrada a partir de definições e axiomas, e também por teoremas já demonstrados.*

Os teoremas podem ser divididos em categorias, de acordo com a importância do resultado:

Definição 1.7 (Proposição) *É um teorema de menor destaque.*

Definição 1.8 (Corolário) *Resultado facilmente obtido como consequência de um teorema ou proposição.*

Definição 1.9 (Lema) *Resultado obtido com a finalidade de auxiliar na demonstração dos teoremas ou proposições.*

Mas como saber se um resultado será um teorema, proposição ou corolário?

Não existe uma regra que permita mensurar a importância de um resultado. Por isso, um mesmo resultado pode aparecer como teorema em um texto, proposição em outro texto e até mesmo como corolário.

Além dos termos já definidos anteriormente, em matemática dois outros termos figuram constantemente e seus significados são pouco conhecidos: conjectura e paradoxo.

Definição 1.10 (Conjectura) *É um resultado que acredita-se ser válido, mas que ainda não foi demonstrado. Se a demonstração for feita, passará a ser um teorema.*

Um exemplo famoso é a já discutida **Conjectura de Goldbach**, que ainda não possui demonstração, apesar de que todos os testes já feitos para números pares extremamente grandes tenham indicado que ela seja verdadeira. Uma referência muito interessante, e que narra a tentativa de uma vida inteira de um matemático grego em demonstrar esse resultado é o livro "*Tio Petros e a Conjectura de Goldbach*" [8].

Definição 1.11 (Paradoxo) *É uma declaração aparentemente verdadeira que leva a uma contradição lógica, ou a uma situação que contradiz a intuição comum.*

Exemplo 1.12 *Observem dois exemplos de paradoxos:*

a) O melhor improviso é aquele que é melhor preparado.

b) O queijo suíço é conhecido por ter muitos buracos. Assim, quanto mais queijo, mais buracos. Porém quanto mais buracos, menos queijo. Logo, quanto mais queijo, menos queijo!

1.3 Principais símbolos utilizados

A matemática moderna é essencialmente uma ciência simbólica. Na seção anterior, vários símbolos matemáticos foram apresentados e, além deles, muitos outros serão utilizados indiscriminadamente em todo o restante do texto desse livro.

Uma lista com os principais símbolos aqui utilizados, juntamente com seus significados, é apresentada na Tabela 4.

Tabela 4 – Principais símbolos matemáticos utilizados nesse livro e seus respectivos significados.

Símbolo	**Significado**
$\forall$	Para todo
$\in$	Pertence
$\notin$	Não pertence
$\exists$	Existe
$\nexists$	Não existe
$\exists!$	Existe um único
$\subset$	Está contido
$\not\subset$	Não está contido
$\subseteq$	Está contido ou é igual
$\supset$	Contém
$\not\supset$	Não contém
$\supseteq$	Contém ou é igual
$\subsetneq$	Está contido e é diferente (subconjunto próprio)
$\supsetneq$	Contém e é diferente (subconjunto próprio)
tq ; ou $\mid$	Tal que
ie	Isto é
$\blacksquare$ ou c.q.d	Fim de uma demonstração (lê-se: como queríamos demonstrar)
$\therefore$	Portanto (*ou:* logo)
$:=$	é igual por definição
$\Longrightarrow$	implica que (*ou:* Se... então)
$\Longleftrightarrow$	é equivalente a (*ou:* Se, e somente se)
$\not\Longrightarrow$	Não implica que
$\emptyset$	Conjunto vazio
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{I}$	Conjunto dos números irracionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos

Na próxima seção passaremos para o entendimento de algumas das principais técnicas de demonstração.

1.4 Técnicas de demonstração

Teoremas, proposições, corolários, lemas e conjecturas sempre são apresentados como relações de implicação ou de equivalência, ie, $p \Longrightarrow q$ ou $p \Longleftrightarrow q$. Caberá ao leitor a função de identificar qual parte do teorema é a hipótese, p, e qual é a tese, q. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.13

a) (***Teorema de Pitágoras***) *Se a é a hipotenusa e b e c são os catetos de um triângulo retângulo, então $a^2 = b^2 + c^2$. Nesse teorema, tem-se que:*

- *Hipótese (H): a é a hipotenusa e b e c são os catetos de um triângulo retângulo;*
- *Tese (T): $a^2 = b^2 + c^2$.*

b) (***Conjectura de Goldbach***) *Todo número par maior do que 2 é a soma de dois números primos. Então:*

- *Hipótese (H): número par maior do que 2;*
- *Tese (T): é a soma de dois números primos.*

Demonstração Direta

É a mais natural técnica de demonstração. Para o caso $p \Longrightarrow q$, se baseia em considerar que a hipótese p é verdadeira e, a partir disso, com base em uma sequência de argumentos lógicos verdadeiros, concluir que a tese q também é verdadeira.

Já no caso $p \Longleftrightarrow q$, basta lembrar que ela pode ser considerada como $p \Longrightarrow q$ e $q \Longrightarrow p$, sendo que, cada um desses casos deve ser verificado conforme descrito no parágrafo anterior.

Observação 1.4 (Ida e Volta) *No caso $p \Longleftrightarrow q$, é comum denominarmos a demonstração da parte $p \Longrightarrow q$ de "**ida**" e da parte $q \Longrightarrow p$ de "**volta**". Portanto, no caso de uma relação de implicação deve-se demonstrar apenas a ida, e, no caso de uma relação de equivalência deve-se demonstrar a ida e a volta.*

Vejamos dois exemplos da aplicação desse método de demonstração, um para uma afirmação implicativa e outro para uma afirmação de equivalência. Mas, antes disso, como parte do raciocínio lógico a ser utilizado nessa seção, apresentamos o conjunto dos números inteiros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$$

juntamente com uma definição muito importante.

Definição 1.12 *Seja x um número inteiro par e y um número inteiro ímpar. Então:*

a) $\exists\ n_1$ inteiro tq $x = 2n_1$.

   Por exemplo:

$$-6 = 2\cdot(-3),\ \ -2 = 2\cdot(-1),\ \ 0 = 2\cdot 0,\ \ 2 = 2\cdot 1,\ \ 8 = 2\cdot 4,\ \ 22 = 2\cdot 11,\ \ldots$$

b) $\exists\ n_2$ inteiro tq $y = 2n_2 + 1$.

Por exemplo:

$$-7 = 2\cdot(-4)+1,\ \ -3 = 2\cdot(-2)+1,\ \ 1 = 2\cdot 0+1,\ \ 5 = 2\cdot 2+1,\ \ 9 = 2\cdot 4+1,\ \ldots$$

Exemplo 1.14 *Demonstre que se x é um número par, então x^2 também é par.*

Essa afirmação é do tipo $p \Longrightarrow q$, onde $p:\ x$ é um número par positivo, e $q:\ x^2$ também é par. Sendo assim, para demonstrar esse resultado de forma direta, deve-se assumir que p é verdadeira e, então, usar argumentos lógicos para concluir que q também será verdadeira.

Demonstração: Considere x um número par positivo qualquer. Então, existe um inteiro positivo n tq $x = 2n$. Logo, pode-se escrever que

$$x^2 = (2n)^2 = 2^2\cdot n^2 = 2\cdot 2\cdot n^2 = 2(2\cdot n^2).$$

Observe, ainda, que como n é um inteiro positivo, pode-se considerar que n^2 também é inteiro positivo e que, portanto, $t = 2\cdot n^2$ também será. Então, vem que

$$x^2 = 2t,$$

o que implica que x^2 é par. ∎

Exemplo 1.15 *Se y é um número inteiro qualquer. Mostre que $y^2 = y \Longleftrightarrow y = 0$ ou $y = 1$.*

Nesse caso, tem-se uma equivalente (que, nesse caso, podemos chamar de bicondicional), o que implica que deve-se demonstrar a ida ($\Longrightarrow$) e a volta ($\Longleftarrow$), ie, assumir que $y^2 = y$ e concluir que $y = 0$ ou $y = 1$. Logo depois, deve-se admitir como verdade que $y = 0$ ou $y = 1$ e concluir que $y^2 = y$.

Demonstração:
($\Longrightarrow$) Considere que $y^2 = y$. Então, subtraindo y de ambos os lados da equação, vem que

$$y^2 - y = 0.$$

Colocando-se y em evidência do lado esquerdo da última equação, tem-se

$$y(y-1) = 0,$$

que implica que deve-se ter $y = 0$ e $y - 1 = 0$.

$$\therefore\ \ y = 0\ \text{ ou }\ y = 1,$$

o que prova a ida.

($\Longleftarrow$) Agora, consideremos que $y = 0$ ou $y = 1$. Então, para $y = 0$ segue que $y^2 = 0^2 = 0 = y$ e para $y = 1$ tem-se que $y^2 = 1^2 = 1 = y$, provando que se $y^2 = y$ em ambos os casos, ou seja, demonstrou-se a volta.

Como a ida e a volta foram provadas, conclui-se que o resultado está demonstrado. ∎

Demonstração Indireta/Redução ao Absurdo

Não é incomum tentar-se demonstrar um resultado de forma direta e não obter sucesso. Uma das formas de fugir desse fracasso é utilizar a *demonstração indireta*, também chamada de *redução ao absurdo* e de *demonstração por absurdo*. Nela, para se demonstrar uma condicional $p \Longrightarrow q$, deve-se:

Supor que p é verdadeira e que q é falsa, ou seja, supor a negação de q, e a partir daí, usando argumentos lógicos verdadeiros, chegar a uma contradição. A contradição será gerada pelo fato de se assumir que a tese é falsa, o que implica que ela deve ser verdadeira. Por isso, o nome *demonstração por absurdo*!

Portanto, na demonstração por absurdo, assume-se o oposto do que se quer provar e, ao se chegar a uma contradição, a prova é finalizada.

Exemplo 1.16 *Demonstre que se x^2 é par, então x é par.*

Demonstração: Considere que x^2 é par e suponha, por absurdo, que x é ímpar. Então, $\exists$ n inteiro tq $x = 2n+1$ e, portanto

$$x^2 = (2n+1)^2 = (2n+1)(2n+1) = 4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n)+1,$$

que leva a

$$x^2 = 2t+1, \text{ onde } t = 2n^2+2n.$$

Tem-se, então, que x^2 é ímpar, que é um ABSURDO, pois por hipótese x^2 é par. Perceba que o absurdo veio do fato de se ter admitido que x é ímpar, o que leva a concluir que x é par. Logo, a demonstração está encerrada!

$\blacksquare$

Demonstração pelo Princípio da Indução Finita

A técnica de demonstração denominada *Princípio da Indução Finita* serve para provar se uma determinada afirmação $P(n)$ é válida para todos os números naturais n, a partir de um determinado n_0, sem a necessidade de realizar a prova para cada uma deles, o que seria impossível.

A técnica funciona da seguinte forma:

1. Mostrar que $P(n_0)$ é verdadeira, ou seja, que a proposição é válida para o número natural n_0.

2. Supondo a afirmação verdadeira para algum natural $k > n_0$ (ie, admitir que $P(k)$ verdadeira), deve-se mostrar que $P(k+1)$ também é verdadeira.

Se essas condições forem assim verificadas, fica demonstrado que a afirmação $P(n)$ é válida $\forall$ $n \geq n_0$.

Observação 1.5 *Denomina-se a afirmação $P(k)$ por hipótese de indução (HI) e a afirmação $P(k+1)$ por tese de indução (TI). Portanto, no passo 2 deve-se admitir que a HI é verdadeira e, com isso, provar que a TI também é.*

Exemplo 1.17 *Demonstre que* $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $\forall$ *n natural.*

Demonstração:

i) **Provando que** $P(1)$ **é verdadeira:** Se $n = 1$, significa que o lado esquerdo da igualdade é 1 e, no lado direito, basta trocarmos n por 1, obtendo

$$P(1): \ 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1,$$

o que prova que $P(1)$ é verdadeira.

ii) **Provando que** $P(k+1)$ **é verdadeira desde que** $P(k)$ **também seja:** Considere que $P(k)$ é válida para algum natural $k > 1$, ou seja

$$(HI) \ \ P(k): \ 1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Queremos provar que vale a TI, ou seja, que

$$P(k+1) = 1+2+3+\cdots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+(k+1) &= \underbrace{1+2+3+\cdots+k}_{HI}+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

Portanto, ao assumirmos que $P(k)$ é verdadeira, provamos que $P(k+1)$ também é. Logo, a proposição é válida $\forall$ n natural.

■

Contra Exemplo

Até aqui, nos preocupamos com técnicas de demonstração, e, portanto, sempre com o objetivo de provar que uma determinada proposição é verdadeira. Contudo, nem sempre uma proposição será verdadeira, e por isso, deve-se entender bem o que é chamado de **Contra Exemplo**.

Para provar que uma proposição é verdadeira, é necessário demonstrar que ela é válida para todos os valores descritos na hipótese. No entanto, para verificar que ela é falsa, basta encontrar um caso onde ela não se verifica, e é esse caso que recebe o nome de Contra Exemplo.

Exemplo 1.18 *Considere a proposição:*

"Todo número da forma $3n$ *sendo* n *um número natural qualquer é menor do que* 1243."

Se ela for verdadeira, demonstre-a e se for falsa, apresente um contra exemplo.

Resolução: Ora, a proposição afirma que $3n < 3243$ para qualquer número natural n. Contudo, observe que se $n = 415$ tem-se que

$$3n = 3 \cdot 415 = 1245 > 1243,$$

que demonstra que a proposição é falsa. Nesse caso, dizemos que $n = 415$ é um contra exemplo para essa proposição.

Apesar de existirem outros métodos de demonstração, nessa seção discutimos três deles, pois são eles os que serão mais utilizaremos nesse livro. Contudo, tão importante quanto conhecer os métodos é: ler muito bem seu enunciado, entendendo cada uma das informações dadas; conseguir identificar claramente a hipótese e a tese, afim de se ter em mente o que se poderá utilizar como verdade e o que se quer demonstrar; conseguir aplicar o resultado em casos particulares (substituindo alguns valores por exemplo) para ganhar familiaridade com o problema e, finalmente, usar, e muito, a imaginação para conseguir caminhos alternativos que facilitem a execução da demonstração.

1.5 Exercícios

1. Considere cada uma das proposições apresentadas e representadas por P. Obtenha $\sim P$, isto é, a negação de P.

   a) P : x é múltiplo de 5 e $(x+4)$ é múltiplo de 7.
   b) P : Henrique é mineiro e Mario não é bahiano.
   c) P : A caneta não é azul ou o lápis não tem ponta.
   d) P : y é um número par ou $y-3$ é ímpar.
   e) P : Todo prédio tem janelas.
   f) P : A blusa é azul OU o sapato é preto.
   g) P : Todo número primo é ímpar.
   h) P : $x > 3$ e $y \leq 0$.
   i) P : x é par ou y não é par.

2. Para cada proposição abaixo, indique qual parte representa a hipótese (H) e qual representa a tese (T).

   a) Se p é um número primo, então $p \geq 2$.
   b) (**Princípio das Gavetas de Dirichlet**) Se n objetos foram colocados em, no máximo, $n-1$ gavetas, então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.
   c) (**Conjectura de Goldbach**) Todo número par maior do que 2 é a soma de dois números primos.
   d) Se $x^2 + x = 0$, então $x_1 = 0$ e $x_2 = -1$.
   e) (**Teorema das quatro cores**) Para cada subdivisão do plano em regiões não superpostas, é sempre possível colorir as regiões usando apenas 4 cores, de forma que regiões com fronteira comum não tenham a mesma cor.

3. Obtenha a recíproca de cada afirmação abaixo. Além disso, determine o valor lógico da afirmação e da sua recíproca.

a) $P \Rightarrow Q$: Se x é um número natural e $x^2 = 2$, então $x \geq 4$.

b) $P \Rightarrow Q$: Se o céu não está nublado há sol.

c) $P \Rightarrow Q$: Se uma caneta não é azul, então ela é vermelha.

d) $P \Rightarrow Q$: Se x é um número par, então ele é múltiplo de 4.

e) $P \Rightarrow Q$: Se y é um natural, então ele também é inteiro.

4. Determine se cada proposição é condicional ou bicondicional. No caso das condicionais, identifique hipótese e tese, e para as bicondicionais, apresente a "ida" e a "volta".

   a) Se $3+3=5$, então o círculo é um quadrado.

   b) Se x é par, então x^3 é par.

   c) Se um polígono é um quadrado, então ele é um retângulo.

   d) Um número qualquer α é racional se, e somente se, α^2 também é racional.

   e) n é par se, e somente se, $n+1$ é par.

5. Usando demonstração por absurdo, prove que:

   a) Se x^2 é ímpar, então x é ímpar.

   b) Se n^2 é par, então n é par.

   c) Se um número k somado a ele mesmo é igual k, então esse número é zero.

6. Apresente um contra exemplo para cada proposição:

   a) Se n é par, então $n+1$ é par.

   b) Se x é ímpar, então $x-1$ é ímpar.

   c) Todo número ímpar é múltiplo de 5.

   d) Se $a \cdot b$ é múltiplo de 6, então a ou b tem que ser múltiplo de 6.

   e) Todo número da forma $(x^2 - x + 41)$, sendo x qualquer número natural, é primo.

7. Demonstre o item c) do Exercício 5 pela técnica de demonstração direta.

8. Usando demonstração direta, prove que:

   a) Se y é um número par, y^3 também é par.

   b) O produto de dois números pares é par.

   c) O produto de dois números ímpares é ímpar.

   d) A soma de dois números pares é par.

   e) A soma de dois números ímpares é par.

9. Usando demonstração por indução finita, prove que $\forall$ n natural vale que:

   a) $P(n): \; 1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2$.

   b) $P(n): \; 3+11+19+\cdots+(8n-5) = 4n^2 - n$.

   c) $P(n): \; 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \left(\frac{n}{3}\right)(n+1)(n+2)$.

10. Sendo p a proposição: Paulo é paulista, e q a proposição: Ronaldo é carioca, traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições:

    a) $\sim q$ b) $p \wedge q$ c) $p \vee q$ d) $p \longrightarrow q$ e) $p \longrightarrow (\sim q)$

11. Seja p a proposição: Roberto fala inglês, e q a proposição: Ricardo fala italiano. Traduza para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

    a) Roberto fala inglês e Ricardo fala italiano.
    b) Roberto não fala inglês ou Ricardo fala italiano.
    c) Se Ricardo fala italiano então Roberto fala inglês.
    d) Roberto não fala inglês e Ricardo não fala italiano.

12. (UFB) Se p é uma proposição verdadeira, então:

    a) $p \wedge q$ é verdadeira, qualquer que seja q.
    b) $p \vee q$ é verdadeira, qualquer que seja q.
    c) $p \wedge q$ é verdadeira só se q for falsa.
    d) $p \longrightarrow q$ é falsa, qualquer que seja q.
    e) n.d.a.

13. (MACK) Duas grandezas x e y são tais que "se $x = 3$ então $y = 7$". Pode-se concluir que:

    a) se $x \neq 3$ antão $y \neq 7$
    b) se $y = 7$ então $x = 3$
    c) se $y \neq 7$ então $x \neq 3$
    d) se $x = 5$ então $y = 5$
    e) se $x = 7$ então $y = 3$

14. (UGF) A negação de $x > -2$ é:

    a) $x > 2$ b) $x \neq -2$ c) $x \leq -2$ d) $x < 2$ e) $x \neq 2$

15. (ABC) A negação de todos os gatos são pardos é:

    a) nenhum gato é pardo;
    b) existe gato pardo;
    c) existe gato não pardo;
    d) existe um e um só gato pardo;
    e) nenhum gato não é pardo.

16. (ABC) A negação de o gato mia e o rato chia é:

    a) o gato não mia e o rato não chia;
    b) o gato mia ou o rato chia;
    c) o gato não mia ou o rato não chia;
    d) o gato e o rato não chiam nem miam;
    e) o gato chia e o rato mia.

17. Duas grandezas A e B são tais que "se $A = 2$ então $B = 5$". Pode-se concluir que:

    a) se $A \neq 2$ antão $B \neq 5$
    b) se $A = 5$ então $B = 2$
    c) se $B \neq 5$ então $A \neq 2$
    d) se $A = 2$ então $B = 2$
    e) se $A = 5$ então $B \neq 2$

18. (VUNESP) Um jantar reúne 13 pessoas de uma mesma família. Das afirmações a seguir, referentes às pessoas reunidas, a única necessariamente verdadeira é:

    a) pelo menos uma delas tem altura superior a $1,90m$;
    b) pelo menos duas delas são do sexo feminino;
    c) pelo menos duas delas fazem aniversário no mesmo mês;
    d) pelo menos uma delas nasceu num dia par;
    e) pelo menos uma delas nasceu em janeiro ou fevereiro.

19. Usando a demonstração por indução finita, mostre que para qualquer inteiro positivo n, vale que $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

20. **Pensando logicamente:** Temos 8 moedas e uma balança de pratos. As moedas são exatamente iguais, exceto uma que é falsa (mais leve do que as outras 7, que possuem o mesmo peso). Como se pode identificar com absoluta certeza a moeda falsa, usando a balança apenas 2 vezes?

CAPÍTULO 2

Teoria Elementar dos Conjuntos

2.1 Conjuntos

Consideramos que conjunto é o mesmo que coleção ou classe. Um conjunto é formado por objetos, que de modo genérico são chamados de elementos.

Notação

- **Conjuntos** são geralmente denotados por letras maiúsculas: $A, B, C, \ldots$
- **Elementos** são geralmente denotados por letras minúsculas: $a, b, c, \ldots$

Definição 2.1 (Relação de pertinência) *Se um objeto a é elemento de um conjunto K, dizemos que "a **pertence a** K" e denotamos essa relação por*[i]

$$a \in K.$$

*Caso contrário, dizemos que "a **não pertence a** K" e escrevemos*

$$a \notin K.$$

Exemplo 2.1 *Se A é o conjunto das vogais, seus elementos são: a, e, i, o, u. Logo, pode-se escrever que $i \in A$ e $b \notin A$.*

Descrição de um Conjunto

Geralmente são usados três procedimentos para definir um conjunto:

1. **Descrevendo seus elementos por uma sentença.**

   Exemplo 2.2

   (a) Conjunto dos números inteiros.
   (b) Conjunto dos meses do ano.

[i] Observe que a Definição 2.1 garante que as notações $\in$ e $\notin$ são específicas para **relacionar um elemento com um conjunto**, e não, conjunto com conjunto.

2. **Listando seus elementos entre chaves.**

   Exemplo 2.3

   (a) Conjuto das vogais: $\{a, e, i, o, u\}$
   (b) Conjunto dos números ímpares menores que 11 e maiores ou iguais a 3: $\{3, 5, 7, 9\}$

   Observação 2.1 *Se o conjunto for **infinito** (ou seja, possuir uma quantidade infinita de elementos) esta notação também pode ser empregada, bastando escrever alguns elementos que evidenciem a lei de formação para seus elementos e em seguida colocar reticências.*

   Exemplo 2.4

   (a) Conjunto dos ímpares positivos: $\{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$
   (b) Conjunto dos primos positivos: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$

   Observação 2.2 *Se o conjunto for **finito** com grande número de elementos, escreve-se alguns deles, usa-se reticências e indica-se o(s) último(s) elemento(s).*

   Exemplo 2.5 *Conjunto dos ímpares de 3 a 501:* $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ..., 501\}$

3. **Indicando uma propriedade que caracteriza os elementos.**

   Exemplo 2.6

   a) $A = \{x \mid x \text{ é inteiro e } x > 3\}$, que se lê: A é o conjunto dos elementos x, tal que x é inteiro e $x > 3$.
   b) $B = \left\{y \mid y \text{ é real e } 1 < y < 9\right\}$, que se lê: B é o conjunto de elementos y, tal que y é real e está entre 1 e 9 (ou, y é maior do que 1 e menor do que 9).
   c) $C = \left\{t \mid t \text{ goza da propriedade } P\right\}$. Nesse último exemplo, C representa um conjunto genérico, cujos elementos foram representados por t, e que devem gozar de uma determinada propriedade P.

Alguns conjuntos numéricos são tão importantes que recebem notações especiais. Nesse capítulo, conheceremos os que mais utilizaremos nesse texto: Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais.

2.2 Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)

É o conjunto formado pelos números que surgiram naturalmente da necessidade do homem de efetuar contagem de objetos. Sendo assim, define-se:

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$$

Observação 2.3 *Diferentemente do que você pode estar acostumado, nesse texto **não** consideraremos o número* 0 *(zero) como natural. Isso porque, historicamente, apesar da sua origem ser incerta, ele surgiu bem depois da criação dos principais símbolos usados para contagem, para representar a ausência de quantidade. Por isso definiremos que o primeiro número natural é o* 1*. Mais detalhes em [5, p. 20-22].*

Nesse texto, quando quisermos nos referênciar ao conjunto formado por todos os números naturais e também pelo 0, usaremos a notação $\mathbb{N}_0$, isto é

$$\mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

Uma característica importante de $\mathbb{N}$ é que ele é **fechado** para as operações de adição (soma) e multiplicação (produto), ou seja, para todo par de números naturais vale que a adição e a multiplicação entre eles também são números naturais. Em termos matemáticos, isso é representado por

$$(a+b) \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad a \cdot b \in \mathbb{N},\ \ \forall\ a, b \in \mathbb{N}.$$

Contudo, mesmo que para alguns casos particulares esse **fechamento** também seja válido para a subtração (diferença) de números naturais, como por exemplo

$$4-3=1 \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ 8-5=3 \in \mathbb{N},$$

percebe-se facilmente que isso não vale de maneira geral, conforme descrito a seguir

$$5-5=0 \notin \mathbb{N} \ \text{ e } \ 9-13=-4 \notin \mathbb{N}.$$

2.3 Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)

Para obter-se um conjunto fechado também para a subtração, adicionou-se ao conjunto $\mathbb{N}$ o número zero e cada um dos simétricos (ou opostos) desse conjunto, isto é, $-1,\ -2,\ -3,\ \ldots$, obtendo assim o chamado conjunto dos números inteiros, representado por:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \\ &= \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots\} \end{aligned}$$

Sendo assim, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros[ii] é fechado para a adição, subtração e multiplicação, ou seja:

$$(a+b) \in \mathbb{Z}, \quad (a-b) \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad a \cdot b \in \mathbb{Z},\ \forall\ a,\ b \in \mathbb{Z}.$$

Observe também, que para a divisão o conjunto dos inteiros não é fechado. Como exemplos desse não fechamento, pode-se considerar

$$7:3 = \frac{7}{3} \notin \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad 5:10 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}.$$

O próximo conjunto a ser apresentado tem como uma de suas finalidade eliminar esse problema.

ii O símbolo $\mathbb{Z}$ é derivado da palavra *Zahlen*, em alemão, que significa *algarismo*.

2.4 Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

Os números racionais surgiram da necessidade de representar partes de um inteiro. Durante as inundações do Rio Nilo, no Egito Antigo, as terras que ficavam submersas recebiam muitos nutrientes, dessa forma tornavam-se muito férteis para a agricultura. Quando as águas baixavam, era necessário remarcar os limites entre os lotes de cada proprietário. Por mais eficiente que fosse a medida utilizada, dificilmente ela caberia um número inteiro de vezes na corda (que representava o comprimento de cada lado de um lote), isso levava a utilização das frações, onde numerador e denominador eram números inteiros.

O conjunto dos números racionais é definido como

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a,\ b \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad b \neq 0 \right\}.$$

Esse conjunto é **fechado** para todas as quatro operações elementares: adição, subtração, multiplicação e divisão, isto é

$$(a+b) \in \mathbb{Q}, \quad (a-b) \in \mathbb{Q}, \quad a \cdot b \in \mathbb{Q} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \ \forall\ a,\ b \in \mathbb{Q}.$$

Observação 2.4 *Um erro comum em alunos, e até mesmo em professores de matemática, é admitir que o conjunto $\mathbb{Q}$ é simplesmente o "conjunto das frações". Observe que, se assim fosse, o número $\frac{\sqrt{3}}{2}$ como é uma fração, seria um racional. Contudo, essa afirmação é falsa, já que é possível provar que $\frac{\sqrt{3}}{2}$ não pode ser escrito como o quociente de inteiros, como é exigido na definição de $\mathbb{Q}$. Portanto, não se esqueça, um número será racional se, e somente se, puder ser escrito como* ***quociente de inteiros****.*

Exemplo 2.7 *Segue alguns exemplos de números racionais.*

a) $0,5 \in \mathbb{Q}$ pois $0,5 = \frac{1}{2}$.

b) $-1,47 \in \mathbb{Q}$ pois $-1,47 = -\frac{147}{100}$.

c) $0,4444444... \in \mathbb{Q}$ pois $0,444444... = \frac{4}{9}$.

d) $7 \in \mathbb{Q}$ já que $7 = \frac{7}{1}$.

e) Se $a \in \mathbb{Z}$ então $a \in \mathbb{Q}$, pois $a = \frac{a}{1}$.

De maneira geral, temos que todos os números inteiros (e portanto, todos os naturais) são racionais. Além disso, todos os decimais exatos e dízimas periódicas também são racionais, já que sempre poderão ser escritos como quociente de inteiros com denominador não nulo. ***Você se lembra o que é, exatamente, uma dízima periódica? E de como proceder para escrever uma dízima periódica como quociente de inteiros?***

Fração geratriz

Antes de discutirmos o que é uma fração geratriz, vamos relembrar o que é uma dízima e uma dízima periódica.

Definição 2.2 (Dízima) *É todo número que quando escrito no sistema decimal apresenta infinitas casas decimais.*

Exemplo 2.8

a) 2,343434... b) 1,10100100010000... c) 0,171717...

d) -5,14213213213... e) $\pi = 3,1415926535\ldots$ f) -1,00323232...

Definição 2.3 (Dízima periódica) *É toda dízima em que, a partir de algum ponto da parte decimal, começa a ocorrer a repetição infinita de um ou mais algarismos. Ao conjunto de algarismos que se repete infinitamente, denomina-se* ***período****.*

Exemplo 2.9 *No Exemplo 2.8, apenas os itens a), c), d) e f) são dízimas periódicas, cujos períodos são, respectivamente, 34, 17, 213 e 32.*

Observação 2.5 *Nos itens a) e c) do Exemplo 2.8, observe que o período começa logo depois da vírgula. Esse típo de dízima é chamada de* ***dízima periódica simples****. Quando existir um algarismo (ou conjunto de algarismos) entre a vírgula e o período, ele será denominado* ***antiperíodo*** *ou* ***parte não periódica****, e a dízima com essa característica, como as dos itens d) e f), são chamadas de* ***dízimas periódicas compostas****.*

$$\underbrace{81}_{\text{Parte inteira}},\overbrace{\underbrace{069}_{\text{antiperíodo}}\underbrace{41}_{\text{período}}414141\ldots}^{\text{Parte decimal}}$$

Definição 2.4 (Fração geratriz) *Chama-se de* ***fração geratriz****, ou simplesmente* ***geratriz****, toda fração da forma p/q com $p,\ q \in \mathbb{Z}^*$ onde a divisão de p por q gera uma dízima periódica.*

Exemplo 2.10 *Como $\frac{4}{9} = 0,44444\ldots$, dizemos que $\frac{4}{9}$ é a geratriz da dízima periódica* $0,44444\ldots$.

Obtendo a geratriz

Consideremos a dízima periódica simples $0,51515151\ldots$. Para obter sua geratriz podemos considerar que

$$x = 0,51515151\ldots \tag{2.1}$$

Multiplicando a Equação (2.1) por 100, vem que

$$100x = 51,51515151\ldots \tag{2.2}$$

Subtraindo a Equação (2.1) da Equação (2.2) chega-se a

$$99x = 51 \Longrightarrow x = \frac{51}{99} \tag{2.3}$$

Das Equações (2.3) e (2.1), conclui-se que

$$0,51515151\ldots = \frac{51}{99} = \frac{17}{33},$$

ou seja, a geratriz procurada é a fração 51/99 ou, na forma irredutível, 17/33.

Observe que o numerador da geratriz é exatamente o período da dízima periódica e que a quantidade de algarismos 9 no seu denominador é igual ao número de algarismos do seu periodo, ou seja, dois. Isso não é coincidência!

Observação 2.6 *A geratriz p/q de uma dízima periódica simples, com parte inteira igual a zero, é tal que: p é igual ao seu período e q é formado por algarismos 9, na mesma quantidade de algarismos do período.*

Exemplo 2.11

a) $0,111111... = \frac{1}{9}$, b) $0,7373\ldots = \frac{73}{99}$, c) $0,291291291\ldots = \frac{291}{999}$.

Se a dízima periódica simples tiver parte inteira ***diferente de zero***, basta obter a geratriz apenas da parte decimal (como já foi descrito na Observação 2.6) e somar esse resultado com sua parte inteira.

Exemplo 2.12 $2,7777\ldots = 2 + 0,7777\ldots = 2 + \frac{7}{9} = \frac{25}{9}$.

No caso onde se quiser obter a geratriz de uma dízima periódica composta, a fração p/q será construída da forma:

- p será gerado pela parte inteira seguida do antiperíodo seguido do período, menos a parte inteira junto com o antiperíodo.

- q será gerado por uma quantidade de 9 igual à quantidade de algarismos do período, seguida da quantidade de zeros que será igual à quantidade de algarismos do antiperíodo.

Exemplo 2.13 *Obtenha a geratriz da dízima periódica composta:* $4,256161616161\ldots$

Resolução:
Para essa dízima tem-se que:

$$\text{Parte inteira} = 4,\ \text{antiperíodo} = 25 \text{ e período} = 61. \text{ Logo:}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{42561 - 425}{9900} \Longrightarrow \frac{p}{q} = \frac{42136}{9900} = \frac{10534}{2475}$$

$\therefore$ A geratriz de $4,256161616161\ldots$ é $\dfrac{42136}{9900}$, ou na forma irredutível, $\dfrac{10534}{2475}$.

Observação 2.7 *O método apresentado para dízimas periódicas compostas também é válido para as dízimas periódicas simples. Por isso, ele é constantemente chamado de **método geral de obtenção da geratriz**.*

2.5 Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$)

Aos números que não podem ser escritos como números racionais, ou seja, como quociente de inteiros com denominador não nulo, denominamos números irracionais. Sua representação nesse livro será:

$$\mathbb{I} = \{x \mid x \notin \mathbb{Q}\}$$

De maneira bem simples, pode-se dizer que o conjunto dos irracionais é formado pelos números que apresentam **representação decimal infinita e não periódica**, já que os que não se enquadram nessa categoria, já são, obviamente, racionais.

Exemplo 2.14 *Alguns irracionais são bem presentes em nossas vidas acadêmicas. Alguns deles são apresentados a seguir:*

a) π (*lê-se: pi*) é, possivelmente, o mais famoso número irracional. Ele é a constante obtida quando se faz a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, gerando sempre o valor $\pi = 3,14159265358979323846\ldots$, com parte decimal não periódica. Como sua representação decimal é infinita, é comum usar-se uma aproximação para seu valor, dada por $\pi \cong 3,14$. Mais detalhes podem ser obtidos em [9, 10, 11, 12].

b) e, o *número de Euler* (que se pronuncia como *Oiler*), cuja representação decimal e não periódica é dada por $e = 2,718281828459\ldots$ e surgiu na construção dos logaritmos, sendo muito útil na matemática pura e aplicada, em especial, no cálculo diferencial e integral. Vide [10, 11] para mais informações.

c) O número de ouro, representado pela letra grega φ (*lê-se: fi*), é outro exemplo importante de número irracional. É possível verificar que $\varphi = 1,6180399\ldots$ ou de outra forma

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ele tem relação direta com grandes monumentos construídos pelo homem, em especial, ele número foi utilizado na construção das pirâmides de Gizé e do Partenon Grego. Ele também aparece na natureza, sendo encontrado em moluscos náuticos e na couve flor, além de muitas outras aparições interessantes. Para mais detalhes, vide [13, 14, 15].

d) Também é possível provar que $\sqrt{p} \in \mathbb{I}$, $\forall\ p$ primo, ou seja, para todo número inteiro positivo que tenha apenas dois divisores distintos. Exemplos:

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{7}\ \text{ e }\ \sqrt{11}.$$

A referência [16] apresenta demonstrações interessantes de que alguns dos exemplos acima são, de fato, irracionais. Além disso, também são discutidas as construções dos racionais e dos irracionais, e suas respectivas operações.

2.6 Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)

Ao conjunto formado por todos os números racionais juntamente com os irracionais é denominado conjunto dos números reais, cuja representação é:

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{Q}\ \text{ ou }\ x \in \mathbb{I}\} \qquad (2.4)$$

Observação 2.8 *Se A indicar qualquer um dos conjuntos numéricos destacados até aqui, temos que:*

a) $A^* = A - \{0\}$

b) $A_+ = \{x \in A \mid x \geq 0\}$, conjunto dos não negativos de A.

c) $A_- = \{x \in A \mid x \leq 0\}$, conjunto dos não positivos de A.

d) $A_+^* = \{x \in A \mid x > 0\}$, conjunto dos estritamente positivos de A.

e) $A_-^* = \{x \in A \mid x < 0\}$, conjunto dos estritamente negativos de A.

Exemplo 2.15 *Considerando $A = \mathbb{Z}$, as notações da Observação 2.8 resultam em:*

a) $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\} = \{\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots\}$

b) *O conjunto dos inteiros não negativos é representado por*

$$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} = \mathbb{N}_0$$

c) *O conjunto dos inteiros não positivos é*

$$\mathbb{Z}_- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 0\} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0\}$$

d) *O conjunto dos inteiros estritamente positivos é*

$$\mathbb{Z}_+^* = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} = \mathbb{N}$$

e) *E o conjunto dos inteiros estritamente negativos é expresso por*

$$\mathbb{Z}_-^* = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1\}$$

Obviamente, essas representações também são válidas quando se considera os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ e $\mathbb{R}$.

2.7 Tipos especiais de conjuntos

Nesta seção definiremos os principais tipos de conjuntos e apresentaremos exemplos de cada um deles.

Definição 2.5 (Conjunto Unitário) *Aquele que possui um único elemento.*

Exemplo 2.16

a) Conjunto dos divisores inteiros e positivos de 1: $\{1\}$.

b) Conjunto das soluções da equação $3x + 1 = 10$: $\{3\}$.

c) Conjunto dos meses com apenas 28 dias: {fevereiro}.

Definição 2.6 (Conjunto Universo) *É aquele ao qual pertencem todos os elementos utilizados em determinado estudo ou assunto, denotado geralmente por U.*

Exemplo 2.17

a) Se as soluções de uma equação são reais, o universo é $U = \mathbb{R}$.

b) Se quisermos uma solução inteira, o universo é $U = \mathbb{Z}$.

c) Para estudar resultados da Mega Sena, o universo é $U = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 60\}$.

Observação 2.9 *Nada impede que, por exemplo, se considere que o universo de soluções de uma equação é $\mathbb{Q}$, mesmo que suas soluções estejam em $\mathbb{Z}$, pois todo inteiro é também racional.*

Definição 2.7 (Conjunto Vazio) *Para que a linguagem de conjuntos seja melhor trabalhada, aceita-se a existência de um "conjunto sem elementos", denominado conjunto vazio, e denotado pelos símbolos $\emptyset$ ou $\{\,\}$.*

Exemplo 2.18

a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \notin \mathbb{R}\} \Rightarrow A = \emptyset$

b) $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 2 < x < 3\} \Rightarrow B = \{\,\}$

Observação: $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, ou seja, é errado usar $\{\emptyset\}$ para representar o conjunto vazio.

Definição 2.8 (Conjuntos Iguais) *Dois conjuntos, X e Y, são iguais quando possuem os mesmos elementos. Quando isso ocorrer, representa-se a igualdade por $X = Y$.*

A Definição 2.8 é equivalente a considerar que $X = Y$ quando todo elemento de X pertence a Y e, reciprocamente, todo elemento de Y pertence a X. Matematicamente isso pode ser expresso por:

$$X = Y \Longleftrightarrow \begin{cases} \forall\, x \in X, \text{ segue que } x \in Y \\ \forall\, y \in Y, \text{ segue que } y \in X \end{cases},$$

que significa que, uma forma de provar que dois conjuntos são iguais é mostrar que

i) Todo elemento de X é também elemento de Y.

ii) Todo elemento de Y é também elemento de X.

Exemplo 2.19

a) $\{1,\ 2,\ 3\} = \{3,\ 1,\ 2\}$

b) $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 < x < 6\}$

Observação: Se X não é igual a Y, escrevemos $X \neq Y$. Isso significa que existe pelo menos um elemento em X que não pertence a Y ou que existe pelo menos um elemento em Y que não está em X.

Exemplo 2.20

a) $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\} \neq \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

b) Se $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ e $B = \{c,\ d,\ e\}$, então $A \neq B$.

Subconjuntos

Definição 2.9 (Subconjunto) *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A é subconjunto de B se, e somente se, todo elemento de A pertence também a B. O símbolo utilizado é o da inclusão, $\subset$, e a notação será $A \subset B$, indicando que "A é subconjunto de B", ou "A está contido em B", ou "A é parte de B". Em linguagem matemática:*

$$A \subset B \iff \forall\ x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Exemplo 2.21 *Sejam $A = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 4\}$ e $B = \{-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4\}$. Observe que todo elemento de A é também elemento de B. Então, segue que $A \subset B$.*

Observação 2.10

a) Pela Definição 2.9, segue que, para mostrar que $A \subset B$ basta considerar um elemento genérico $x \in A$ e mostrar que ele também é elemento de B, ie, $x \in B$.

b) $A \not\subset B$ indica que A **não está contido** em B (negação de $A \subset B$), ou seja, significa que existe $x \in A$ tal que $x \notin B$.

c) Quando $A \subset B$, também pode-se escrever $B \supset A$, e lê-se: B contém A.

d) Quando $A \not\subset B$, também pode-se escrever $B \not\supset A$, e lê-se: B não contém A.

Propriedades 2.1 *A relação definida por $A \subset B$ goza das seguintes propriedades:*

a) $\emptyset \subset A$

b) $A \subset A$ (Reflexiva)

c) Se $A \subset B$ e $B \subset A \Rightarrow A = B$ (Antissimétrica)

d) Se $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ (Transitiva)

Demonstração:

a) (Por absurdo) Supor que $\emptyset \not\subset A$, significa admitir que existe um elemento x tal que $x \in \emptyset$ e $x \notin A$. Ora, é claro que $x \in \emptyset$ é um absurdo! Esse absurdo foi obtido ao se assumir que $\emptyset \not\subset A$. Portanto, deve-se aceitar que $\emptyset \subset A$.

b) É óbvia, pois tomando um elemento genérico $x \in A \Rightarrow x \in A\ \forall\ x$. Logo, $A \subset A$.

c) Decorre da definição de igualdade entre conjunto, vejamos:

   - Por hipótese, tem-se que $A \subset B \Longrightarrow$ dado $x \in A$, obrigatoriamente tem-se que $x \in B$. Isto é, todo elemento de A é também elemento de B.
   - Ainda por hipótese, $B \subset A \Longrightarrow$ dado $y \in B$, tem-se que $y \in A$, o que significa que todo elemento de B é também elemento de A.

   Logo, como todos os elementos de A são elementos de B e todos os elementos de B são de A. Segue que a Definição 2.8 é satisfeita, garantindo que $A = B$.

d) Seja $a \in A$, então $a \in B$ por hipótese. Mas, se $a \in B$, também por hipótese tem-se que $a \in C$. Ou seja, todo elemento de A é também elemento de C.

■

Observação 2.11 (Demonstração da igualdade de conjuntos) *Atente para o fato de que a parte c) da Proposição 2.1 nos fornece uma ótima forma de demonstrar que dois conjuntos são iguais. Sendo assim, sempre que for necessário provar que* $A = B$*, basta provar que* $A \subset B$ *e* $B \subset A$*.*

Observação 2.12 *Após a definição de subconjuntos, pode-se afirmar que:*

a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ou equivalente $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$

b) $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{I}$ e $\mathbb{I} \not\subset \mathbb{Q}$

c) $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Observação 2.13 *Se dois conjuntos* A *e* B *são tais que* $A \subset B$ *e* $A \neq B$*, diz-se que* A *é* ***subconjunto próprio*** *de* B*, e isso pode ser indicado por:*

$$A \subsetneq B \text{ ou } B \supsetneq A.$$

Por exemplo, temos que $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$ *(ou* $\mathbb{Z} \supsetneq \mathbb{N}$*) e que* $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$ *(ou* $\mathbb{Q} \supsetneq \mathbb{Z}$*).*

Conjunto das Partes

É o conjunto constituído por todos os subconjuntos possíveis de um conjunto A, e denotado por $P(A)$.

Exemplo 2.22 *Seja* $K = \{a, b\} \Rightarrow P(K) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$*. Então, todo conjunto de dois elementos possui exatamente 4 subconjuntos possíveis.*

Definição 2.10 (Cardinalidade) *Ao número de elementos de um conjunto* K *dá-se o nome de cardinalidade de* K *e simboliza-se, geralmente, por* $|K|$ *ou* $\#K$*.*

Exemplo 2.23 *No Exemplo 2.22 temos que* $|K| = 2$ *e que* $|P(K)| = 4$*, ou de outra forma, que* $\#K = 2$ *e* $\#P(K) = 4$*.*

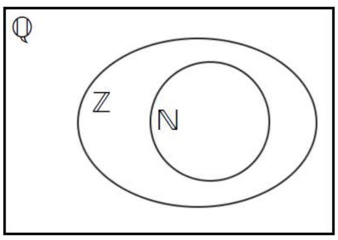
Diagramas de Venn

Diagramas de Venn são representações gráficas utilizados para ilustrar, e visualizar melhor, algumas relações e operações entre conjuntos.

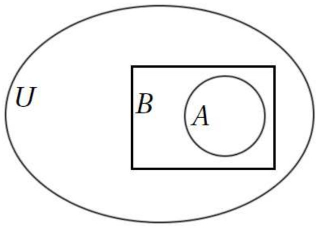
A ideia é representar, por meio de linhas fechadas simples, o conjunto universo (quando necessário) e seus subconjuntos.

Exemplo 2.24

a) A relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ pode ser representada por:



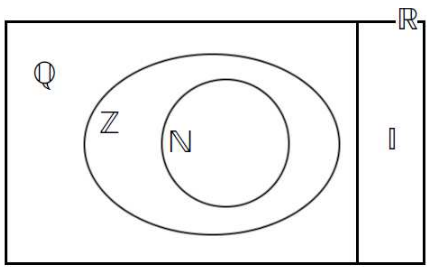
b) A relação $A \subsetneq B$ sendo A e B conjuntos do universo U pode ser representada pelo diagrama:



Observe que nessa representação vale que $A \subset B$ e que $A \neq B$, já que existem elementos de B que não são elementos de A.

Observação 2.14 *Situações como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ também podem ser representadas por $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$. Contudo, as notações de subconjuntos próprios geralmente são utilizadas quando se quer dar ênfase que os conjuntos são distintos. Quando isso não é realmente necessário, é mais comum utilizar apenas as notações de subconjuntos.*

c) Perceba, ainda, que uma forma de representar $\mathbb{R}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$ por um diagrama é:



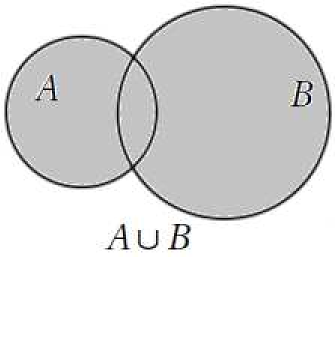
União de Conjuntos

Dados dois conjuntos, A e B, a união entre eles é dada pela propriedade "$x \in A$ ou $x \in B$", e é representada por $A \cup B$ (lê-se: A união com B ou A reunião B). Portanto:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ ou \ x \in B\} \tag{2.5}$$

Observação 2.15 *O "ou" não é exclusivo em $A \cup B$, ou seja, o elemento pode pertencer apenas a A, apenas a B a até mesmo, pertencer a A e B simultaneamente.*

O diagrama a seguir representa a união entre dois conjuntos A e B, que nada mais é do que a junção dos conjuntos.



Exemplo 2.25 *Considerando os conjuntos E e F em cada item, obtenha $E \cup F$:*

a) $E = \{2, 3, 4, 10\}$ e $F = \{-1, 0, 2, 3\}$. Então, $E \cup F = \{-1, 0, 2, 3, 4, 10\}$.

b) $E = \{0, 1\}$ e $F = \{-3, -2, -1, 2\}$. Então, $E \cup F = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$.

c) $E = \{A, B, C\}$ e $F = \{A, B, C, D\}$. Então, $E \cup F = \{A, B, C, D\} = F$.

Propriedades 2.2 *Para quaisquer três conjuntos genéricos A, B e C a união possui as seguintes propriedades:*

a) $A \cup A = A$ (Idempotente)

b) $A \cup \emptyset = A$ (Elemento neutro)

c) $A \cup B = B \cup A$ (Comutativa)

d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (Associativa)

e) Se $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

Demonstração:

a) Já sabemos que mostrar que $A \cup A = A$ é equivalente a mostrar que $(A \cup A) \subset A$ e que $A \subset (A \cup A)$.

Seja então $x \in (A \cup A)$ um elemento qualquer. Então, $x \in A$ ou $x \in A$. É claro que, em qualquer uma destas possibilidades, temos que $x \in A$. Logo, $(A \cup A) \subset A$.

Agora, tomemos um elemento qualquer y, tal que $y \in A$. Então, podemos garantir que $y \in A$ ou $y \in A$, o que implica que $y \in (A \cup A)$. Portanto, $A \subset (A \cup A)$.

Como $(A \cup A) \subset A$ e $A \subset (A \cup A)$, segue que $A \cup A = A$.

(b) Devemos mostrar que $(A \cup \emptyset) \subset A$ e que $A \subset (A \cup \emptyset)$.

Seja então, x um elemento qualquer de A. Então, $x \in A$. Podemos escrever ainda que "$x \in A$ ou $x \in \emptyset$"e, por isso, temos que $x \in (A \cup \emptyset) \Rightarrow A \subset (A \cup \emptyset)$.

Tome agora $x \in (A \cup \emptyset)$. Então, $x \in A$ ou $x \in \emptyset$, o que implica em $x \in A$, já que não existe $x \in \emptyset$. Logo, $(A \cup \emptyset) \subset A$.

Portanto, $A \cup \emptyset = A$.

c) e d) Deixadas como exercício.

(e) Seja $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ *ou* $x \in B$. Mas, como $A \subset B$, temos que se $x \in A$, então $x \in B$. Então, se $x \in A \cup B$ implica que $x \in B$, desde que $A \subset B$. Portanto, $(A \cup B) \subset B$.

Tomemos agora, $x \in B \Rightarrow x \in B$ *ou* $x \in A$, pois basta que uma delas seja verdadeira. Então, $x \in (A \cup B)$. Logo, $B \subset (A \cup B)$.

Portanto, se $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$.

■

Observação 2.16 *De acordo com a forma como o conjunto dos números reais foi descrito na Igualdade 2.4 e como a união de conjuntos foi apresentada na Igualdade 2.5, nas páginas 25 e 30, respectivamente, deve ficar claro para o leitor que*

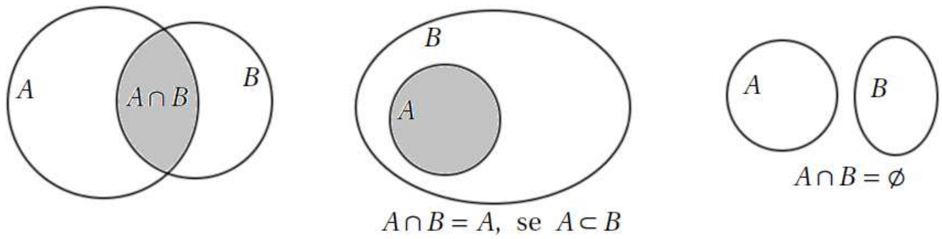
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Interseção de Conjuntos

Dados dois conjuntos, A e B, a interseção entre eles é definida pela propriedade "$x \in A$ **e** $x \in B$", e é indicada por $A \cap B$. Logo:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ e \ x \in B\}$$

Observação 2.17 *$A \cap B$ lê-se como: "A inter B" ou "A interseção B", e indica que se $x \in A \cap B$ ele é elemento de A e de B simultaneamente. Vejamos alguns exemplos:*



Definição 2.11 *Quando $A \cap B = \emptyset$ dizemos que A e B são **conjuntos disjuntos**.*

Exemplo 2.26 *Considerando os conjuntos J e K em cada item, obtenha $J \cap K$:*

a) $J = \{-3, -2, -1, 0\}$ e $K = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$. Então, $J \cap K = \{-1, 0\}$.

b) $J = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $K = \{-5, -4, 3, \pi\}$. Então, $J \cap K = \emptyset$.

c) $J = \{e, f, g\}$ e $K = \{e, f, g, h, i\}$. Então, $J \cap K = \{e, f, g\} = J$.

Propriedades 2.3 *Para quaisquer três conjuntos genéricos A, B e C a interseção possui as seguintes propriedades:*

a) $A \cap B = B \cap A$ (comutatividade)

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associatividade)

c) Se $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

d) $A \cap \emptyset = \emptyset$

Demonstração:

a) Considere $x \in A \cap B$. Então, $x \in A$ e $x \in B$, que pode ser escrito como $x \in B$ e $x \in A \Longrightarrow x \in B \cap A \Longrightarrow A \cap B \subset B \cap A$.

De forma análoga, prova-se que $B \cap A \subset A \cap B$. Portanto, $A \cap B = B \cap A$.

b) Deixada como exercício.

c) Devemos mostrar que se $A \subset B$, então $(A \cap B) \subset A$ e que $A \subset (A \cap B)$.

Seja $x \in (A \cap B)$, então $x \in A$ e $x \in B$, o que implica que, com certeza, $x \in A$. Logo, $(A \cap B) \subset A$.

Seja agora, $x \in A$. Mas, como por hipótese, $A \subset B$, se $x \in A$ implica que $x \in B$, ou seja, temos que $x \in A$ e $x \in B$. Então, $x \in (A \cap B)$. Logo, $A \subset (A \cap B)$.

Portanto, se $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$.

d) Deixada como exercício.

■

Exemplo 2.27 (Aplicação do Diagrama de Venn) *Em uma prova discursiva de álgebra com apenas duas questões, 470 alunos acertaram apenas uma das questões e 260 acertaram a segunda. Sendo que 90 alunos acertaram as duas e 210 alunos erraram a primeira questão. Quantos alunos fizeram a prova?*

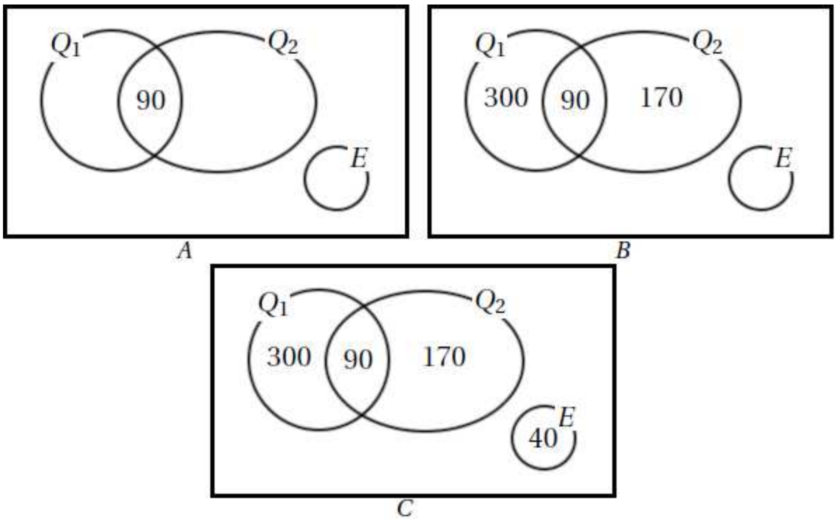
Resolução: Vamos utilizar um Diagrama de Venn para ajudar na visualização da solução do problema. Sejam Q_1 e Q_2 os conjuntos que representam os alunos que acertaram as questões 1 e 2, respectivamente, e E, o conjunto dos alunos que erraram ambas as questões. Como 90 alunos acertaram as duas questões, temos que

$$Q_1 \cap Q_2 = 90 \text{ (Diagrama A).}$$

Como 260 alunos acertaram a segunda questão, significa que $\#Q_2 = 260$. Porém, dentre os que acertaram a segunda questão estão os 90 alunos da interseção. Logo, o número de alunos que acertaram apenas a questão 2 é dado por $260 - 90 = 170$ (Diagrama B).

Além disso, o fato de 470 alunos terem acertado apenas uma das questões, significa que o total de alunos que acertaram apenas a questão 1 ou a questão 2 é 470. Como já foi calculado, 170 acertaram apenas a questão 2. Então, o número dos que acertaram apenas a questão 1 é obtido por $470 - 170 = 300$ (Diagrama B).

Temos ainda que 210 alunos erraram a questão 1, e é claro que, dentre eles, estão os 170 que acertaram apenas a questão 2. Portanto, sobram $210 - 170 = 40$ alunos, que erraram as questões 1 e 2, que são os que compõem o conjunto E (Diagrama C).



Sendo assim, é claro que o total de alunos, T, que fizeram a prova é obtido com a soma de todos os valores apresentados no diagrama, ie:

$$T = 300 + 90 + 170 + 40 \Longrightarrow T = 600.$$

Atente para o fato de que começamos o preenchimento dos diagramas pela interseção dos conjuntos. Essa estratégia é super útil, pois é a partir dela que conclusões importantes sobre o problema podem ser obtidas.

Diferença de Conjuntos

A diferença entre A e B (conjuntos) é o conjunto formado pelos elementos de A que não são elementos de B. Matematicamente tem-se que:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

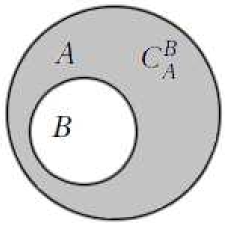
Exemplo 2.28

a) Sendo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$, segue que $A - B = \{1, 2, 3\} - \{2, 3, 4, 5\} = \{1\}$, pois 1 é o único elemento que está em A e não está em B.

b) Se $A = \{a, b\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$, tem-se que $A - B = \{a, b\} - \{a, b, c, d, e\} = \emptyset$, já que não existe elemento de A que também não seja elemento de B.

Complementar de B em A

Definição 2.12 *Dados A e B conjuntos, onde $B \subset A$, denomina-se **complementar de** B **em relação a** A, e indica-se por C_A^B ou $\overline{B}$, o conjunto $A - B$.*



Observação 2.18 *Sendo assim, se $x \in C_A^B \Longrightarrow x \in A$ e $x \notin B$, ou seja: se x está no complementar de um conjunto, ele **não** pode estar no conjunto, e, se x está no conjunto, **não** pode estar no seu complementar.*

Exemplo 2.29

a) $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,3,4\} \Rightarrow C_A^B = \{1\}$

b) $A = \{1,2,3,4\} = B \Rightarrow C_A^B = \emptyset$

c) $A = \{a,b,c\}$ e $B = \emptyset \Rightarrow C_A^B = A$

Observação 2.19 *Quando não houver dúvidas sobre qual o universo em que se está trabalhando, para simplificar a notação, podemos representar o complementar de uma parte A desse universo por A^C. Portanto, se $x \in A \Longrightarrow x \notin A^C$ e se $x \in A^C \Longrightarrow x \notin A$.*

Propriedades 2.4 *Seja U o conjunto universo e A e B subconjuntos de U. Então:*

a) $U^C = \emptyset$

b) $\emptyset^C = U$

c) $\left(A^C\right)^C = A$

d) $A \cap A^C = \emptyset$

Demonstração:

a) e b) Deixadas como exercício.

c) Como sabemos, nesse caso é preciso mostrar que $\left(A^C\right)^C \subset A$ e que $A \subset \left(A^C\right)^C$.

– Tomemos $x \in \left(A^C\right)^C \Longrightarrow x \notin A^C \Longrightarrow x \in A$. Logo, $\forall\ x \in \left(A^C\right)^C$ vale que $x \in A$, ie, $\left(A^C\right)^C \subset A$.

– Seja agora, $x \in A \Longrightarrow x \notin A^C \Longrightarrow x \in \left(A^C\right)^C$, ie, $\forall\ x \in A$ vale que $x \in \left(A^C\right)^C$. Isso implica em $A \subset \left(A^C\right)^C$.

$$\therefore\ \left(A^C\right)^C = A.$$

d) Considere um $x \in A \cap A^C \Longrightarrow x \in A$ e $x \in A^C$, o que é um ABSURDO pela Definição 2.12 ou também, pela Observação 2.18. Portanto, $\nexists\ x \in A \cap A^C$ e, por isso, tem-se que $A \cap A^C = \emptyset$.

■

Além das Propriedades 2.4, descritas anteriormente, destacam-se outras duas propriedades, denominadas Leis de De Morgam ou leis de Dualidade, enunciadas aqui pelo Teorema 2.1.

Teorema 2.1 (Leis de De Morgan ou de Dualidade) *Para quaisquer dois conjuntos A e B de um universo U, vale que:*

a) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

b) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

Demonstração:

a) Seja $x \in U$. Se $x \in (A \cap B)^C \Rightarrow x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \notin A\ ou\ x \notin B$. Logo,

$$x \in A^C\ ou\ x \in B^C \Rightarrow x \in (A^C \cup B^C) \Rightarrow (A \cap B)^C \subset (A^C \cup B^C).$$

$$\begin{aligned} \text{Se } x \in (A^C \cup B^C) &\Rightarrow x \in A^C\ ou\ x \in B^C \\ &\Rightarrow x \notin A\ ou\ x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \cap B \\ &\Rightarrow x \in (A \cap B)^C \\ &\Rightarrow A^C \cup B^C \subset (A \cap B)^C. \end{aligned}$$

$\therefore\ (A \cap B)^C = A^C \cup B^C.$

b) Deixada como exercício.

■

Existem muitas outras propriedades dos conjuntos, mas o objetivo desse capítulo é apenas introduzir os conceitos iniciais e apresentar alguns exemplos de demonstrações para que o aluno se familiarize com as notações e alguns raciocínios utilizados em demonstrações que envolvem conjuntos genéricos. Propriedades mais complexas geralmente são estudadas e demonstradas em cursos de álgebra abstrata e de análise real.

2.8 Exercícios

1. Descreva os conjuntos abaixo por meio das propriedades de seus elementos.

   a) $A = \{4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$

   b) $B = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

   c) $C = \{Lua\}$

   d) $D = \left\{Mercúrio,\ Vênus,\ Marte,\ Júpiter,\ Saturno,\ Urano,\ Netuno\right\}$

2. Quais dos conjuntos abaixo são unitários? Justifique sua resposta.

   a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 2 \text{ e } x < 1\}$

   b) $B = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

   c) $C = \{Lua\}$

   d) $D = \{x \mid x < 0 \text{ e } x \in \mathbb{N}\}$

   e) $E = \left\{y \in \mathbb{Z} \mid -4 < y \leq -3\right\}$

3. Algum conjunto do exercício anterior é vazio? Justifique.

4. Classifique cada sentença abaixo em verdadeira (V) ou falsa (F), apresentando uma justificativa para as sentenças falsas.

   a) $0 \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

   b) $\{a,\ b\} \subset \{a, b, c\}$

   c) $-4 \in \{-7,\ -5,\ -4,\ 0\}$

   d) $\{a,\ b\} \in \{a, b, c\}$

   e) $-9 \in \{-10,\ -8,\ -5,\ -4\}$

   f) $-5 \in \mathbb{Z}$

   g) $\emptyset \in \{1,\ 2,\ 9\}$

   h) $-5 \in \mathbb{N}$

   i) $\emptyset \subset \{1,\ 2,\ 9\}$

   j) $\dfrac{10}{5} \in \mathbb{Z}$

   k) $\sqrt{23} \in \mathbb{Q}$

   l) $\sqrt{11} \in \mathbb{I}$

   m) $0,7777777... \in \mathbb{Q}$

   n) $-234,541 \in \mathbb{Q}$

   o) $\sqrt{37} \in \mathbb{R}$

   p) $0,000000032 \in \mathbb{I}$

5. Use verdadeiro (V) ou falso (F) para cada uma das afirmações. Para as afirmações falsas apresente uma justificativa.

   a) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$

   b) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$

   c) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

   d) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

   e) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

   f) $\mathbb{I} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{I}$

   g) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$

   h) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

   i) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$

   j) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$

6. Considerando que A, B e C são conjuntos quaisquer, classifique como verdadeiro (V) ou falso (F). Apresente uma justificativa para as sentenças falsas.

   a) $B \in (A \cup B)$
   b) $C \supset (A \cap B)$
   c) $B \subset (A \cup B)$
   d) $C \subset (A \cap B)$
   e) $(A \cup B) \subset B$
   f) $(A \cap B) = C$

7. Considere os conjuntos A e B definidos da seguinte forma: $A = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{I} - \mathbb{Q}$. É possível afirmar que $A \cup B = \mathbb{R}$? Justifique sua resposta.

8. (CEFET-AL) Em relação aos principais conjuntos numéricos, é CORRETO afirmar que:

   a) Todo número racional é natural, mas nem todo número natural é racional.
   b) Todo número inteiro é natural, mas nem todo número natural é inteiro.
   c) Todo número real é natural, mas nem todo número natural é real.
   d) Todo número racional é inteiro, mas nem todo número inteiro é racional.
   e) Todo número irracional é real.

9. (FATEC) Sejam a e b números irracionais. Dadas as afirmações:

   I) $a \cdot b$ é um número irracional.
   II) $a + b$ é um número irracional.
   III) $a - b$ pode ser um número racional.

   Podemos concluir que:

   a) as três são falsas.
   b) as três são verdadeiras.
   c) somente I e III são verdadeiras.
   d) somente I é verdadeira.
   e) somente I e II são falsas.

10. (UFSE) Os senhores A, B e C concorriam à liderança de certo partido político. Para escolher o líder, cada eleitor votou apenas em dois candidatos de sua preferência. Houve 100 votos para A e B, 80 votos para B e C e 20 votos para A e C. Em consequência:

    a) venceu A, com 120 votos.
    b) venceu A, com 140 votos.
    c) A e B empataram em primeiro lugar.
    d) venceu B, com 140 votos.
    e) venceu B, com 180 votos.

11. (UFMG - 2003) Em uma pesquisa de opinião, foram obtidos estes dados:

    - 40% dos entrevistados leem o jornal A.
    - 55% dos entrevistados leem o jornal B.

- 35% dos entrevistados leem o jornal C.
- 12% dos entrevistados leem o jornal A e B.
- 15% dos entrevistados leem o jornal A e C.
- 19% dos entrevistados leem o jornal B e C.
- 7% dos entrevistados leem os três jornais.
- 135 pessoas entrevistadas não leem nenhum dos três jornais.

Considerando-se esses dados, é CORRETO afirmar que o número total de entrevistados foi

a) 1.200 b) 1.500 c) 1.250 d) 1.350

12. (UFMG - 2006) Uma pesquisa foi feita com um grupo de pessoas que frequentam, pelo menos, uma das três livrarias, A, B e C. Foram obtidos os seguintes dados:

- das 90 pessoas que frequentam a Livraria A, 28 não frequentam as demais.
- das 84 pessoas que frequentam a Livraria B, 26 não frequentam as demais.
- das 86 pessoas que frequentam a Livraria C, 24 não frequentam as demais.
- oito pessoas frequentam as três livrarias.

Determine o número de pessoas que frequentam apenas **uma** das livrarias.

13. Demonstre as propriedades c) e d) das Propriedades 2.2, ou seja:

c) $A \cup B = B \cup A$ d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

14. Demonstre as propriedades b) e d) das Propriedades 2.3, ou seja:

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ d) $A \cap \emptyset = \emptyset$

15. Demonstre as propriedades a) e b) das Propriedades 2.4, ou seja:

a) $U^C = \emptyset$ b) $\emptyset^C = U$

16. Demonstre a segunda lei de De Morgan, item b) do Teorema 2.1, ie:
$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

17. Explique com suas palavras, porque podemos afirmar que os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ são disjuntos?

18. Use os conjuntos $A = \{\ \}$, $B = \{a\}$, $C = \{a,\ b\}$ e $D = \{a,\ b,\ c\}$ para conjecturar que: Se um conjunto K tem cardinalidade n, então $\#P(K) = 2^n$, ou seja, a cardinalidade do conjunto das partes de um conjunto com n elementos é sempre igual a 2^n.

19. Seja $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito X (*outra notação para cardinalidade*). Mostre então que, se A e B são conjuntos finitos, verifica-se a importante relação:
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

20. Em uma escola que possui 712 alunos, 421 estudam Inglês, 283 estudam Francês e 89 estudam ambas as línguas.

    a) Quantos alunos estudam Inglês ou Francês?
    b) Quanto alunos não estudam nenhuma das duas?

21. Considere dois conjuntos A e B de um universo U, tais que $A \cap B \neq \emptyset$. Construa um diagrama de Venn para representar cada um dos conjuntos solicitados.

    a) $A - B$ b) $B - A$ c) $A \cup B$ d) $A \cap B$ e) A^C f) B^C g) $(A \cap B)^C$

22. (ENEM - *texto modificado*) Em determinado dia houve uma campanha de doação de sangue em uma Universidade. Sabe-se que o sangue das pessoas pode ser classificado em quatro tipos quanto a antígenos. Uma pesquisa feita com um grupo de 100 alunos da Universidade constatou que 42 deles têm o antígeno A, 36 têm o antígeno B e 12 o antígeno AB. Sendo assim, podemos afirmar que o número de alunos cujo sangue tem o antígeno O é:

    a) 20 alunos
    b) 22 alunos
    c) 34 alunos
    d) 35 alunos
    e) 36 alunos

23. Dados os conjuntos $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, represente as operações abaixo.

    a) $A \cup B$
    b) $A \cap B$
    c) $A - B$
    d) $B - A$

24. Classifique cada sentença como V (verdadeira) ou F (falsa), sempre justificando a sua resposta.

    a) A soma de um número racional com um número irracional é sempre um número irracional.
    b) O produto de dois números irracionais pode ser racional.
    c) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.
    d) $1,888888\ldots \in \mathbb{Q}$.

25. Em certa comunidade há indivíduos de três raças: branca, preta e amarela. Sabendo que 70 são brancos e 350 não são pretos e 50% são amarelos, pergunta-se:

    a) Quantos indivíduos tem a comunidade?
    b) Quantos são os indivíduos amarelos?

26. Sejam $A = [0;\ 5[$ e $B =]1;\ 3[$ dois intervalos reais, isto é, A é o segmento de reta de 0 inclusive a 5 exclusive; e B é o segmento de 1 a 3 exclusive. Determinar C_A^B.

27. (PUC-MG) Se $A =]-2;\ 3]$ e $B = [0;\ 5]$, então os números inteiros que estão em $B - A$ são:

    a) -1 e 0
    b) 1 e 0
    c) 4 e 5
    d) 3, 4 e 5
    e) 0, 1, 2 e 3

28. Sejam A e B conjuntos genéricos. Para que se tenha $A - B = \emptyset$ é necessário que se tenha $A = B$? Se a resposta a essa pergunta for verdadeira, demonstre-a, mas se for falsa, apresente um contra exemplo.

29. Obtenha os conjuntos solicitados.

    a) $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}$ b) $C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}}$ c) $C_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{N}}$ d) $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{I}}$ e) $C_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{Z}}$

30. Determine C_B^A sendo $A = \{c,\ d,\ e,\ f,\ g\}$ e $B = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i,\ j\}$.

CAPÍTULO 3

Potenciação e Radiciação

3.1 Potenciação

Potência de expoente inteiro

Definição 3.1 *Define-se* a^n *com* $a \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *e denomina-se potência de base a e expoente natural n, da seguinte forma:*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ vezes}}$$

Além disso, se $n = 1$ *ou* $n = 0$ *define-se as potências de expoente n respectivamente por*

$$a^1 = a \quad \text{e} \quad a^0 = 1.$$

Já a potência com expoente inteiro negativo, $-n$, *e com* $a \neq 0$, *é definida da forma*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Exemplo 3.1

a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

b) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$

d) $7^1 = 7$

e) $(-6)^0 = 1$

f) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$

g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{(2/3)^2} = \frac{1}{4/9} = \frac{9}{4}$

h) $0^{23} = 0$

Exemplo 3.2 *A **notação científica** é uma das grandes aplicações das potências de expoentes inteiros. Ela serve para representar números muito grandes ou muito pequenos de forma padronizada. Um número escrito em notação científica deve estar na forma*

$$m \times 10^k,$$

onde $1 \leq |m| < 10$ *é um número racional denominado mantissa e* $k \in \mathbb{Z}$ *é a ordem de grandeza.*

Para se escrever um determinado número em notação científica, deve-se deslocar sua vírgula até que se obtenha a mantissa, isto é, um número cujo módulo seja maior ou igual a 1 *e menor do que* 10. *Fazendo-se isso, a ordem de grandeza k será o número de casas deslocadas se o deslocamento ocorreu para a esquerda, e o simétrico desse número se o deslocamento for para a direita (isso é, será um valor negativo).*

A distância do planeta Terra até o Sol é de aproximadamente $149.600.000$ *km. A forma desse número em notação científica é*

$$1,49 \times 10^8 \ km.$$

Já a massa de um próton é de cerca de $0,00000000000000000000000000167$ *kg. Obviamente, escrever esse número toda vez que se quiser apresentar a massa do próton não é muito conveniente. Sendo assim, escrevê-lo em notação científica torna-se muito mais vantajoso, e será da forma*

$$1,67 \times 10^{-27} \ kg.$$

Observação 3.1 *Percebe-se facilmente que, da forma como uma potência de expoente inteiro foi definida, vale que:*

a) Se $a = 0$ e $n > 0 \implies a^n = 0$.

b) Se $a = 0$ e $n < 0 \implies \nexists \ a^n$.

c) Se $a > 0 \implies a^n > 0, \ \forall \ n \in \mathbb{Z}$.

d) Se $a < 0 \implies \begin{cases} a^n > 0 & \text{se n é par} \\ a^n < 0 & \text{se n é ímpar} \end{cases}$.

Propriedades das potências

As potências de expoentes inteiros possuem várias propriedades importantes e úteis em diversas aplicações da matemática na própria matemática, mas também na Física, nas Engenharias, na Biologia etc.

Considerando $a, b \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{Z}$, as principais propriedades serão descritas a seguir. Também faremos a justificativa de todas elas, mas, por comodidade, essas justificativas considerarão apenas o caso onde $m, n \in \mathbb{N}$.

1. O **produto de potências de mesma base** pode ser efetuado pela conservação da base e soma dos expoentes: $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

   A justificativa para essa propriedade é simples, pois como

$$a^m = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \ vezes} \quad \text{e} \quad a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \ vezes}$$

   segue que:

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m \ vezes} \cdot \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \ vezes} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \ vezes} \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

2. O **quociente de potências de mesma base** pode ser calculado pela conservação da base e subtração dos expoentes, conforme descrito na igualdade a seguir:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a \neq 0}$$

A justificativa dessa propriedade usa a mesma ideia da propriedade 1, porém, tem-se várias possibilidades para $m - n$, de acordo com os seguintes casos:

- Se $m > n$:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m\ vezes}}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ vezes}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m-n\ vezes} = a^{m-n}$$

- Se $m = n$:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m\ vezes}}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ vezes}} = 1 = a^0 = a^{m-m} = a^{m-n}$$

- Se $m < n$:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{m\ vezes}}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ vezes}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m\ vezes}} = \frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{m-n}$$

Exemplo 3.3

a) $3^3 \cdot 3^{-1} = 3^{3+(-1)} = 3^2 = 9$

b) $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(-\dfrac{3}{2}\right)^5 = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^{2+5} = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^7$

c) $\dfrac{3^7}{3^3} = 3^{7-3} = 3^4$

d) $\dfrac{(2/5)^3}{(2/5)^5} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{3-5} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2$

3. O **produto de potências do mesmo expoente** pode ser expresso por

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$$

Uma forma simples de justificar a validade dessa propriedade é observar que

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ vezes} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n\ vezes} \\ &= \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n\ vezes} \\ &= (ab)^n \end{aligned}$$

4. O **quociente de potências de mesmo expoente** tem a seguinte propriedade

$$\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,\ b \neq 0}$$

Observe que

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot \ldots \cdot a}^{n\ vezes}}{\underbrace{b \cdot \ldots \cdot b}_{n\ vezes}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n\ vezes} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,$$

o que justifica essa propriedade.

5. Para finalizar, tratemos da propriedade relativa à **potência de uma potência**

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \left(a^m\right)^n &= \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n\ vezes} \\ &= a^{\overbrace{m+m+\cdots+m}^{n\ vezes}} \\ &= a^{mn}, \end{aligned}$$

justificando essa propriedade.

Exemplo 3.4

a) $3^4 \cdot 2^4 = (3 \cdot 2)^4 = 6^4$

b) $\dfrac{5^{-3}}{3^{-3}} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{-3} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^3$

c) $\left(9^2\right)^{-1} = 9^{2\cdot(-1)} = 9^{-2} = \dfrac{1}{81}$

Exemplo 3.5 *Obtenha a simplificação da expressão* $\frac{6\cdot 5^{2n+1} - 4\cdot 5^{2n}}{30\cdot 25^n}$.

Resolução:

$$\frac{6 \cdot 5^{2n+1} - 4 \cdot 5^{2n}}{30 \cdot 25^n} = \frac{3 \cdot 5^{2n+1} - 2 \cdot 5^{2n}}{15 \cdot (5^2)^n} = \frac{3 \cdot 5^{2n} \cdot 5 - 2 \cdot 5^{2n}}{15 \cdot 5^{2n}} = \frac{\cancel{5^{2n}}(15-2)}{15 \cdot \cancel{5^{2n}}} = \frac{13}{15}.$$

3.2 Radiciação

Definição 3.2 *Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Define-se a raiz enésima de a, onde a e n são denominados respectivamente por radicando e índice da raiz, da forma*

$$\sqrt[n]{a} = b \Longleftrightarrow b^n = a,$$

sendo que o número b é único e:
- *se n for par $\Longrightarrow$ $a \geq 0$ e $b \geq 0$;*
- *se n for ímpar e $a < 0$ $\Longrightarrow b < 0$;*
- *se $a \geq 0$ $\Longrightarrow$ $b \geq 0 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.*

Observação 3.2

1. Pela Definição 3.2 segue que a raiz de índice 1 de a é igual ao próprio a, ou seja, $\sqrt[1]{a} = a$. Esse tipo de raiz geralmente não é utilizada e as vezes nem é considerada na definição.
2. Para a raiz de índice 2, denominada **raiz quadrada**, é muito comum não apresentar esse índice de forma explícita, isto é, $\sqrt[2]{a}$ é geralmente representada, da forma $\sqrt{a}$.
3. Uma raiz de índice 3 é denominada **raiz cúbica**, de índice 4 é **raiz quarta**, de índice 5 é **raiz quinta** e assim sucessivamente.

Exemplo 3.6 *Observe os valores calculados para as raízes apresentadas:*

a) $\sqrt{9} = 3$, pois $3^2 = 9$. Ou seja, a raiz quadrada de 9 é igual a 3.

b) $\sqrt[2]{49} = 7$, pois $7^2 = 49$.

c) $\sqrt[3]{8} = 2$, já que $2^3 = 8$. Isto é, a raiz cúbica de 8 é igual a 2.

d) $\sqrt[3]{-8} = -2$, já que $(-2)^3 = -8$. Isto é, a raiz cúbica de -8 é igual a -2.

e) $\sqrt[5]{-32} = -2$, pois $(-2)^5 = -32$.

f) $\sqrt[5]{32} = 2$, pois $2^5 = 32$.

g) $\sqrt[7]{0} = 0$, pois $0^7 = 0$.

h) $\sqrt[3]{-64} = -4$, visto que $(-4)^3 = -64$.

Observação 3.3 *É comum alguns alunos confundirem e considerarem, por exemplo, que $\sqrt{4} = \pm 2$. Isso porque, pensam apenas que a raiz quadrada de 4 deve ser o número que elevado ao quadrado resulte em 4, e tanto 2 quanto -2 possuem essa característica. Contudo, a definição é clara em garantir que qualquer raiz enésima de um número não negativo será sempre não negativa. Isso garante que 2 é o único resultado para $\sqrt{4}$.*

Uma definição que ajuda a garantir que esse tipo de confusão não aconteça é escrever a Definição 3.2, na parte relacionada ao caso onde o índice da raiz é par, da seguinte forma:

Definição 3.3 *Se n é par e $a \in \mathbb{R}$, então* $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} -a & se \quad a < 0 \\ a & se \quad a \geq 0 \end{cases}.$

Exemplo 3.7

a) O número 4 pode ser escrito como 2^2 e $(-2)^2$. Então,

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = |2| = 2 \ \text{ e } \ \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2.$$

b) $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3 \neq -3$.

c) $\sqrt[6]{\left(5-\sqrt{41}\right)^6} = |5-\sqrt{41}| = \sqrt{41}-5$, pois $5 < \sqrt{41}$.

Observação 3.4 *Atente para o fato de que essa definição deixa claro que uma forma para calcular $\sqrt[n]{a^n}$, com n par, não é "cortar" ou "cancelar" o expoente do radicando com o índice (**como muitas vezes é ensinado, ou entendido!**), mas sim, considerar o módulo de a.*

Potenciação com expoente racional

Nessa seção vamos apresentar a definição de potência de expoente racional. A ideia por traz dessa definição será garantir que todas as propriedades de potênciação válidas para expoentes inteiros também sejam válidas quando eles forem quaisquer racionais.

Considere $n \in \mathbb{Z}^*$, $a \in \mathbb{R}_+$ e o caso particular do racional $1/n$. Para que a propriedade do produto de potências de mesma base continue válida, é necessário que se tenha

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \underbrace{a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{1}{n}}}_{n \ vezes} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a.$$

Portanto, a potência $a^{\frac{1}{n}}$ deve ser o número positivo que elevado a n resulta em a. Sendo assim, de acordo com a definição de raiz enésima, segue que esse número é a raiz enésima de a, ou seja, consideraremos que

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Considere agora o racional m/n. Com a mesma ideia, temos que

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = \underbrace{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{m}{n}}}_{n \ vezes} = a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}} = a^{\frac{mn}{n}} = a^m.$$

Então, como $a^{\frac{m}{n}}$ é o número positivo que elevado a n resulta em a^m, segue pela definição de raiz que a raiz enésima de a^m deve ser $a^{\frac{m}{n}}$. Com isso, apresentamos a definição formal de potência de expoente racional.

Definição 3.4 (Potência de expoente racional) *Sejam $a \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$. Define-se que*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Exemplo 3.8

a) $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$

b) $4^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{4^3} = \sqrt[4]{64}$

c) $9^{\frac{-1}{2}} = \sqrt[2]{9^{-1}} = \sqrt[2]{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$

d) $1024^{0,1} = 1024^{1/10} = \sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$

e) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{1/4} = \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right]^{1/4} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3/4}$

Propriedades dos radicais

Considerando que todas as propriedades para potências de expoente inteiro são válidas para expoente racional, é possível justificar as principais propriedades para radicais.

Considere, então, $a,\ b \in \mathbb{R},\ m,\ n,\ t \in \mathbb{N}$ e os radicais $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$. Então, tem-se que:

1. **Produto de radicais de mesmo índice**

   O produto entre os radicais é

   $$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{ab}$$

   Portanto,

   $$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}}$$

   Então, na multiplicação de radicais de mesmo índice, pode-se conservar o índice e multiplicar os radicandos.

2. **Quociente de radicais de mesmo índice**

   O quociente entre eles pode ser expresso por

   $$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

   Então,

   $$\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,, \quad b \neq 0}$$

   Logo, na divisão de radicais de mesmo índice, pode-se conservar o índice e dividir os radicandos, obviamente com $b \neq 0$.

3. **Potência cuja base é um radical**

   Consideremos o radical $\sqrt[n]{a}$ como base da potência de expoente m. Então,

   $$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

   Logo,

   $$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}}$$

   Sendo assim, elevar um radical a um expoente m é equivalente a elevar o radicando a m.

   Exemplo 3.9

   a) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5 \cdot 5^2} = \sqrt[3]{5^3} = 5$

b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{50} = \sqrt{2\cdot 50} = \sqrt{100} = 10$

c) Se $x, y \in \mathbb{R}$, então $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3x}\cdot\sqrt{y} = \sqrt{9xy} = 3\sqrt{xy}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

e) $\left(\sqrt{7}\right)^5 = \sqrt{7^5}$

f) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^4 = \sqrt[4]{3^4} = 3$

g) $\left(\sqrt[3]{6}\right)^{-2} = \sqrt[3]{6^{-2}}$

h) $\sqrt[3]{-8}\cdot\sqrt[3]{27} = -2\cdot 3 = -6 = \sqrt[3]{-8\cdot 27} = \sqrt[3]{-216}$

4. **Raiz de raiz**

   Observe que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ pode ser reescrita como

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{\frac{1}{n}}{m}} = a^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a}$$

   Então,

$$\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}}$$

   Portanto, para obter a raiz de uma raiz, pode-se conservar o radicando e multiplicar seus índices.

5. **Simplificação de radicais**

   Considere a raiz enésima da potência a^m. Então,

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m\cdot t}{n\cdot t}} = \sqrt[nt]{a^{mt}}$$

   Logo,

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nt]{a^{mt}}}$$

   Sendo assim, ao se multiplicar ou dividir o índice de uma raiz e o expoente do radicando por um mesmo valor inteiro positivo t, seu valor não se altera.

Exemplo 3.10

a) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{4^{15}}} = \sqrt[5\cdot 3]{4^{15}} = \sqrt[15]{4^{15}} = 4$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{13}} = \sqrt[3\cdot 2]{13} = \sqrt[6]{13}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}} = \sqrt[2\cdot 2\cdot 2\cdot 2]{3} = \sqrt[16]{3}$

d) $\sqrt[3]{5^1} = \sqrt[3\cdot 2]{5^{1\cdot 2}} = \sqrt[6]{5^2}$

e) $\sqrt[8]{2^4} = \sqrt[8:4]{2^{4:4}} = \sqrt{2}$

f) $\sqrt[9]{7^6} = \sqrt[9:3]{7^{6:3}} = \sqrt[3]{7^2}$

g) $\sqrt[16]{5^{40}} = \sqrt[16:8]{5^{40:8}} = \sqrt{5^5}$

Exemplo 3.11 *Outra importante aplicação da potenciação é na* ***dinâmica populacional****. Apresentaremos aqui dois exemplos simples de modelos matemáticos que descrevem crescimentos de populações e que possuem potências envolvidas.*

1. *Com conhecimentos de uma área da matemática denominada Equações Diferenciais, é possível provar que a população do Brasil, até o ano de* 2010 *cresceu seguindo o modelo matemático*

$$y(t) = \frac{257 \cdot 10^6}{1 + 0,51 \cdot e^{-0,04t+80}}$$

Nesse modelo[i], $y(t)$ *representa a população do Brasil em milhões de habitantes no ano* t*, que pode variar de* 1950 *a* 2010. *Os erros observados entre os valores obtidos por esse modelo e os dados coletados pelo IBGE variam de 0,5% a 1,5%, indicando boa correlação entre os resultados. A constante e representa o número de Euler. Mais detalhes sobre o modelo de crescimento logístico e do número de Euler podem ser obtidos em [17, 18, 19, 20].*

2. *Uma espécie de bactéria de nome "Escherichia coli", responsável por mais de 50% dos casos de intoxicação alimentar, possui uma taxa de crescimento populacional de 80% a cada 30 minutos sob condições ambientais ideais. Ao se considerar uma população inicial de* 100.000 *bactérias, o número* $P(n)$ *de bactérias em função do número* n *de períodos de* 30 *minutos é dado por*[ii]

$$P(n) = 100.000 \cdot 1,8^n.$$

Observe que no momento inicial, ou seja, quando $n = 0$*, tem-se que* $P(0) = 100.000$ *bactérias, que está de acordo com os dados do exemplo. Além disso, após uma hora, como temos dois períodos de* 30 *minutos, segue que o número de bactérias será dado por* $P(2) = 100.000 \cdot 1,8^2 = 100.000 \cdot 3,24$*, isto é, ter-se-á*

$$P(2) = 324.000 \text{ bactérias.}$$

3.3 Simplificação de radicais

Utilizando as propriedades dos radicais e da potenciação, é possível obter uma expressão equivalente a um determinado radical, mas escrita de uma forma mais simples. Fazendo isso, dizemos que o radical foi simplificado. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3.12 *Segue a simplificação de alguns radicais:*

a) $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt[4:2]{x^{2:2}} = \sqrt{x}$

b) $\sqrt[6]{x^4 y^2} = \sqrt[6]{x^4} \cdot \sqrt[6]{y^2} = \sqrt[6:2]{x^{4:2}} \cdot \sqrt[6:2]{y^{2:2}} = \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2 y}$

c) $\sqrt[15]{32 \cdot x^5} = \sqrt[15]{2^5 \cdot x^5} = \sqrt[15:5]{2^{5:5} \cdot x^{5:5}} = \sqrt[3]{2x}$

i Esse modelo é denominado Logístico e tem representação gráfica aproximada a um "S". Essa nomeclatura foi utilizado pela primeira vez pelo matemático Pierre François Verhulst, a partir de 1844. As aplicações possíveis da função logística são muitas, destacando-se: rede neural artificial, biologia, biomatemática, química, demografia, economia, geociências, psicologia matemática, probabilidade, sociologia, ciências políticas e estatísticas.

ii Modelo apresentado na referência [21].

d) $\sqrt[4]{324} = \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^4} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{3^4} = 3\sqrt[4]{4}$

e) $\sqrt{7200} = \sqrt{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2} = 4 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{2} = 60\sqrt{2}$

f) $\sqrt{6^{10}} = 6^5$

g) $\sqrt[5]{3^6 \cdot 2^7} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 3 \cdot 2^5 \cdot 2^2} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 2^5} \cdot \sqrt[5]{3 \cdot 2^2} = 6\sqrt[5]{12}$

h) $\sqrt[5]{x^3y^7z^5w} = \sqrt[5]{x^3y^5y^2z^5w} = \sqrt[5]{y^5} \cdot \sqrt[5]{z^5} \cdot \sqrt[5]{x^3y^2w} = yz\sqrt[5]{x^3y^2w}$

i) $\sqrt[3]{x^3y^7z^5w} = \sqrt[3]{x^3y^6yz^3z^2w} = \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt{y^6} \cdot \sqrt[3]{z^3} \cdot \sqrt[3]{yz^2w} = xy^3z\sqrt[3]{yz^2w}$

j) $\sqrt[3]{a^7b^6c^4d^9} = \sqrt[3]{a^6ab^6c^3cd^9} = \sqrt[3]{a^6} \cdot \sqrt[3]{b^6} \cdot \sqrt[3]{c^3} \cdot \sqrt[3]{d^9} \cdot \sqrt[3]{ac} = a^2b^2cd^3\sqrt[3]{ac}$

Exemplo 3.13 *Obtenha o valor de* $K = \sqrt[5]{243} + 7^0 - (0,25)^{-2} + (0,5)^{-3} \cdot \frac{1}{8} + 2^{3^2} - \left(2^3\right)^2$.

Resolução: Separadamente temos que,

- $\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$,
- $(0,25)^{-2} = \left(\dfrac{25}{100}\right)^{-2} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} = \left[\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}\right]^2 = 4^2 = 16$,
- $(0,5)^{-3} = \left(\dfrac{5}{10}\right)^{-3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\right]^3 = 2^3 = 8$,
- $2^{3^2} = 2^{3\cdot 3} = 2^9 = 512$,
- $\left(2^3\right)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$.

Logo,

$$\begin{aligned}
K &= \sqrt[5]{243} + 7^0 - (0,25)^{-2} + (0,5)^{-3} \cdot \frac{1}{8} + 2^{3^2} - \left(2^3\right)^2 \\
&= 3 + 1 - 16 + 8 \cdot \frac{1}{8} + 512 - 64 \\
&= -12 + 1 + 448 \\
&= 437.
\end{aligned}$$

3.4 Redução de radicais ao mesmo índice

Em operações de multiplicação e divisão de radicais, é necessário que eles possuam o mesmo índice, conforme já vimos nas propriedades 1 e 2 de radicais. Sendo assim, dados dois ou mais radicais, é importante sabermos como obter radicais equivalentes a cada um deles, de forma que todos possuam o mesmo índice.

Uma forma de se fazer isso é calcular o MMC (mínimo múltiplo comum) dos índices envolvidos, que será o índice que cada radical deverá ter. Logo após, deve-se dividir o MMC por cada índice. O resultado obtido nessa divisão, será um fator que deve ser multiplicado pelo índice e pelos expoentes de cada fator no radicando. Para facilitar o entendimento, vejamos alguns exemplos:

Exemplo 3.14 *Observe a redução de cada par (ou trio) de radicais ao mesmo índice.*

a) $\sqrt[3]{xy^2}$ e $\sqrt[5]{x^3y}$. Como os índices dos radicais são 3 e 5, deve-se obter o MMC desses dois valores: $mmc(3,5) = 15$. Em seguida, divide-se 15 por 3 e por 5, obtendo $15 : 3 = 5$ e $15 : 5 = 3$. Logo, o próximo passo será multiplicar os índices e os expoentes dos termos dos radicandos de $\sqrt[3]{xy^2}$ e de $\sqrt[5]{x^3y}$ por 5 e por 3 respectivamente, que nos leva aos seus radicais equivalentes, que são

$$\sqrt[15]{x^5 \cdot y^{10}} \ \text{ e } \ \sqrt[15]{x^9 \cdot y^3}$$

b) $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[6]{ab^2}$ e $\sqrt[3]{x^2y^3}$ são respectivamente equivalentes a $\sqrt[12]{2^3}$, $\sqrt[12]{a^2b^4}$ e $\sqrt[12]{x^8y^{12}}$.

3.5 Racionalização de denominadores

Seja uma fração que tenha em seu denominador um número irracional da forma $\sqrt[n]{a^m}$. Racionalizar esse denominador não é nada mais do que obter uma nova fração, equivalente à primeira, e que possua denominador racional[iii].

Dada uma fração qualquer, uma forma de obter outra fração, equivalente à primeira, é multiplicar a primeira por 1, mas escrevendo esse termo de uma forma conveniente. Isso pode ser obtido de várias forma, como, por exemplo: propriedades de radicais e produtos notáveis. Vejamos:

Frações com denominadores do tipo $\sqrt{a}$

Seja a fração $2/\sqrt{5}$. Ao racionalizarmos esse denominador, $\sqrt{5}$, devemos pensar em escrever o número 1 de forma que, ao se efetuar a multiplicação dessa fração por 1, o denominador se torne racional. Observe que se multiplicarmos apenas o denominador pela própria $\sqrt{5}$, teremos $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5 \in \mathbb{Q}$. Logo, escrevemos $1 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ e teremos que:

$$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}_{=1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Sendo assim, a nova fração obtida é equivalente à primeira, mas apresenta denominador racional, e o número $\sqrt{5}$ é chamado de **fator de racionalização** ou **racionalizante**.

A racionalização de $\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ pode ser feita da seguinte forma:

$$\frac{3+\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{7\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(3+\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}}{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}+2}{14},$$

onde o fator de racionalização é $\sqrt{2}$.

[iii] Por favor, após estudarem essa seção do livro, NÃO entendam que racionalizar um denominador é algo obrigatório. É apenas uma forma, considerada mais elegante por muitos, de obter uma fração sem denominadores irracionais. Além disso, historicamente a racionalização foi útil para facilitar cálculos quando não existiam calculadoras. Por exemplo, é bem mais prático fazer a divisão de $1,4142$ por 2, do que obter o resultado de 1 dividido por $1,4142$ (sendo $1,4142 \cong \sqrt{2}$). Observe que a segunda divisão é uma aproximação para $1/\sqrt{2}$, enquanto que a primeira é uma aproximação da sua racionalização. Para mais detalhes, ver [22].

Observação 3.5 *Os dois casos de racionalização de denominadores descritos até aqui servem para ilustrar o fato de que, sempre que o denominador da fração for da forma* $\sqrt{a}$, *o fator racionalizante será* $\sqrt{a}$, *pois:*

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = |a|.$$

Frações com denominadores do tipo $\sqrt[n]{a^m}$

Seja, agora, a fração $\frac{3}{\sqrt[5]{7^2}}$. Observe que o índice da raiz apresentada no denominador é diferente de 2. Nesse caso, pode-se obter a racionalização dessa fração da seguinte forma:

Como queremos que ao se efetuar a multiplicação do numerador e denominador dessa fração pelo fator racionalizante, obenha-se um denominador racional, devemos procurar qual deve ser o fator A tal que

$$\sqrt[5]{7^2} \cdot A = 7 \Rightarrow 7^{2/5} \cdot A = 7^1 \Rightarrow A = \frac{7^1}{7^{2/5}} \Rightarrow A = 7^{1-\frac{2}{5}} \Rightarrow A = \sqrt[5]{7^3}.$$

Logo, $\sqrt[5]{7^3}$ é o fator racionalizante e, portanto

$$\frac{3}{\sqrt[5]{7^2}} = \frac{3}{\sqrt[5]{7^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{7^3}}{\sqrt[5]{7^3}} = \frac{3\sqrt[5]{7^2}}{\sqrt[5]{7^5}} = \frac{3\sqrt[5]{7^2}}{7}.$$

O fato do expoente do radicando ser igual a 3 no terceiro caso do exemplo anterior não é coincidência. Esse valor pode ser obtido fazendo-se a diferença entre o índice do radical, que no exemplo é 5 e o expoente do radicando, que é 2, isto é, $5 - 2 = 3$.

Observação 3.6 *Em geral, sempre que* $a \in \mathbb{Q}$, $n > 2$ *e o denominador for do tipo* $\sqrt[n]{a^m}$, *o seu fator racionalizante será* $\sqrt[n]{a^{n-m}}$, *pois:*

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^{(m-m)+n}} = \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ |a| & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}.$$

Exemplo 3.15

1. $\frac{5}{\sqrt[7]{(-2)^4}}$ possui como fator racionalizante o radical $\sqrt[7]{(-2)^3}$, o que implica em uma racionalização da forma

$$\frac{5}{\sqrt[7]{(-2)^4}} = \frac{5}{\sqrt[7]{(-2)^4}} \cdot \frac{\sqrt[7]{(-2)^3}}{\sqrt[7]{(-2)^3}} = \frac{5\sqrt[7]{(-2)^3}}{\sqrt[7]{(-2)^4} \cdot \sqrt[7]{(-2)^3}} = \frac{5\sqrt[7]{(-2)^3}}{\sqrt[7]{(-2)^7}} = -\frac{5\sqrt[7]{(-2)^3}}{2}.$$

2. Já a fração $\frac{8}{\sqrt[10]{(-2)^4}}$ tem como fator de racionalização $\sqrt[10]{(-2)^6}$, o que leva a

$$\frac{8}{\sqrt[10]{(-2)^4}} = \frac{8}{\sqrt[10]{(-2)^4}} \cdot \frac{\sqrt[10]{(-2)^6}}{\sqrt[10]{(-2)^6}} = \frac{8\sqrt[10]{(-2)^6}}{\sqrt[10]{(-2)^{10}}} = \frac{8\sqrt[10]{(-2)^6}}{|-2|} = 4\sqrt[10]{(-2)^6}.$$

Exemplo 3.16 *Racionalize a fração* $\frac{6}{\sqrt[5]{256}}$.

Resolução: Primeiro, observemos que $\sqrt[5]{256} = \sqrt[5]{2^8} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2^3} = 2\sqrt[5]{2^3}$. Então, pode-se escrever que

$$\frac{6}{\sqrt[5]{256}} = \frac{6}{2\sqrt[5]{2^3}} = \frac{3}{\sqrt[5]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{3\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{3\sqrt[5]{2^2}}{2}.$$

Frações com denominadores do tipo $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$

Do produto da soma pela diferença de dois termos sabemos que $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$. Logo, considerando $a, b \in \mathbb{Q}_+$, tem-se que

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = a-b,$$

sendo que $(a-b) \in \mathbb{Q}$.

Então, tem-se uma forma clara de obtenção dos fatores de racionalização para os casos $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ e $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, descritos na Observação 3.7.

Observação 3.7 *O fator racionalizante da fração será $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ quando seu denominador for $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ e será $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ quando o denominador for do tipo $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. Dessa forma, sempre se terá o produto da soma pela diferença de dois termos, gerando um denominador racional.*

Exemplo 3.17

1. $\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}} = \dfrac{3\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2} = \dfrac{3\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)}{3-7} = -\dfrac{3\left(\sqrt{3}-\sqrt{7}\right)}{4}.$

2. $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}-\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}-\sqrt{8}} \cdot \dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{8}}{\sqrt{10}+\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{10}\left(\sqrt{10}+\sqrt{8}\right)}{10-8} = \dfrac{10+\sqrt{80}}{2} = 5+2\sqrt{5}.$

3.6 Exercícios

1. Obtenha os valores das seguintes potências:

   a) 42^0 b) 13^1 c) 1^{20} d) $\left(\frac{1}{4}\right)^2$

   e) $(-3)^{-3}$ f) $(0,3)^3$ g) 3^{-1} h) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

   i) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}$ j) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ k) 7^{-2} l) $-\left(-\frac{3}{2}\right)^3$

   m) $-(-1)^{17}$ n) $-(-1)^{18}$ o) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{-1}$ p) $(-0,01)^3$

2. Considerando que $a \in \mathbb{N}$, obtenha o valor de

$$Z = (-1)^{2a+1} + (-1)^{2a} - (-1)^{2a+3} - (-1)^a.$$

3. Utilizando as propriedades de potenciação simplifique ao máximo a expressão

$$\left(x^5 \cdot y^4\right)^3 \cdot \left(x^2 \cdot y^3\right)^2 \cdot x \cdot y^2.$$

4. Considere o número $q = \frac{2m}{n}$, em que $m = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + 0,3$ e $n = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$. O valor de q é tal que:

   a) $0 < q < 1$ b) $1 < q < 2$ c) $2 < q < 3$ d) $3 < q < 4$ e) $4 < q < 5$

5. O valor de $\frac{21^{30}}{63^{15}}$ é:

   a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$ b) 7^{15} c) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ d) 3^{15}

6. Dois casos especiais de potenciação costumam confundir os estudantes:

$$i)\ -a^n \text{ e } ii)\ a^{m^n}$$

   a) O caso $-a^n$ é definido por $-a^n = -(a^n) = -(\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ vezes})$.

   b) O caso a^{m^n} é definido por $a^{m^n} = a^{\overbrace{m \cdot m \cdot \ldots \cdot m}^{n\ vezes}}$.

   Obtenha um exemplo numérico que mostre que $-a^n \neq (-a)^n$ e outro que mostre que $a^{m^n} \neq (a^m)^n$.

7. Se $a = 10^{-3}$, o valor de $\frac{0{,}01 \cdot 0{,}001 \cdot 10^{-1}}{100 \cdot 0{,}0001}$, em função de a, é:

   a) $100a$ b) $10a$ c) a d) $\frac{a}{10}$

8. Considerando que $a \cdot b \neq 0$ e que $b \neq 0$, simplifique as expressões.

   a) $\left(a^3 \cdot b^2\right)^2 \cdot \left(a^2 \cdot b^{-2}\right)^2$
   b) $\left[\left(a^2 \cdot b^2\right)^2\right]^3$
   c) $\dfrac{\left(a^3 \cdot b^2\right)^4 \cdot \left(a^4 \cdot b^3\right)^2}{\left(a^2 \cdot b^3\right)^3}$
   d) $\left(\dfrac{a^8 \cdot b^6}{a^4 \cdot b^2}\right)^{10}$

9. Considerando $x \cdot y \neq 0$, simplifique a expressão $\dfrac{(x^{-2} \cdot y^3)^{-2}}{(x^3 \cdot y^{-4})^3}$.

10. Sendo $x \neq 0$ e $y \neq 0$, simplifique cada expressão:

    a) $(x^3 \cdot y^2)^3 \cdot (x^{-2} \cdot y^2)^2$
    b) $\left(\dfrac{x^3 \cdot y^{-4}}{x^{-2} \cdot y^{-5}}\right)^2$
    c) $\dfrac{(x^2 \cdot y^{-2})^{-4} \cdot (x^{-3} \cdot y^{-3})^{-2}}{(x^{-2} \cdot y^{-5})^2}$
    d) $\left(\dfrac{x^{-5} \cdot y^7}{x^6 \cdot y^{-3}}\right)^{-3}$
    e) $(x^{-1} + y^{-1}) \cdot (x + y)^{-1}$
    f) $(x^{-2} - y^{-2}) \cdot (x^{-1} - y^{-1})^{-1}$

11. (PUC-MG) O valor da expressão $A = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$ é:

    a) 1 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{17}{12}$ e) $-\frac{1}{72}$

12. Considere $a, b \in \mathbb{R}^*$. Simplifique a expressão $\dfrac{(ab)^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}}$ sem deixar que expoentes negativos apareçam explicitamente.

13. Um aluno do ensino médio foi solicitado para encontrar o resultado da seguinte raiz: $\sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Ele respondeu que

$$\sqrt{x^2} = x.$$

    Comente de forma crítica a resposta apresentada pelo aluno.

14. Efetue o calculo dos valores dos seguintes radicais:

a) $\sqrt[5]{32}$ b) $\sqrt[6]{1}$

c) $\sqrt[3]{8}$ d) $\sqrt{9}$

e) $\sqrt[9]{0}$ f) $\sqrt{(a-1)^2},\ a \in \mathbb{R}$

g) $-\sqrt[3]{8}$ h) $\sqrt{(-7)^2}$

i) $\sqrt[3]{(-2)^3}$ j) $\sqrt[4]{(-5)^4}$

k) $-\sqrt[4]{81}$ l) $-\sqrt[10]{(-8)^{10}}$

15. Considerando $x \in \mathbb{R}$, determine:

a) $\sqrt{(x-2)^2}$ b) $\sqrt{(x+5)^2}$ c) $\sqrt[4]{(2x-3)^4}$ d) $\sqrt[3]{(-5x+2)^3}$

16. Reduza ao mesmo índice os seguintes trios de radicais:

a) $\sqrt[3]{a^2b},\ \sqrt[6]{ab^2}$ e $\sqrt[4]{a^3b^2}$ b) $\sqrt{xy^2},\ \sqrt[3]{x^2y^3}$ e $\sqrt[9]{x^2y}$

c) $\sqrt[4]{a^3b^2},\ \sqrt{a^5b^2}$ e $\sqrt[6]{xy^2}$ d) $\sqrt{x^2y^4},\ \sqrt[5]{xy^2}$ e $\sqrt[10]{a^2b^3}$

17. Use V (verdadeira) ou F (falsa) para classificar cada uma das sentenças:

a) $\sqrt{25} = \pm 5$ b) $\sqrt[6]{(-6)^6} = -6$

c) $\sqrt{a^4} = a^2,\ \forall\ a \in \mathbb{R}$ d) $\sqrt{9} = -3$

e) $\sqrt{(a-2)^2} = a-2,\ \forall\ a \in \mathbb{R}$ f) $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{4}$

g) $\sqrt{(x-5)^2} = x-5,\ \forall\ x \in \mathbb{R}$ e $x \leq 5$ h) $-\sqrt{9} = -3$

i) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{2}{3}$ j) $\sqrt[4]{(-11)^4} = -11$

k) $\sqrt[5]{(-6)^5} = -6$ l) $-\sqrt[10]{(-7)^{10}} = 7$

18. Simplifique os radicais:

a) $\sqrt{196}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{144}$ d) $\sqrt[3]{729}$ e) $\sqrt[4]{625}$ f) $\sqrt[3]{250}$

g) $\sqrt[4]{512}$ h) $\sqrt[3]{4^7}$ i) $\sqrt{2000}$ j) $\sqrt[3]{128}$ k) $\sqrt[4]{3888}$ l) $\sqrt[3]{54}$

19. Efetue as operações solicitadas e apresente a resposta de forma simplificada:

a) $\sqrt{\dfrac{5}{3}} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{3}}$ b) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt[5]{2} : \sqrt[5]{\dfrac{2}{5}}$ d) $\sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{2}$ e) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{3^5}$

20. Efetue as operações solicitadas:

a) $8\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}$ b) $2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75}\right)$ d) $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right) \cdot \sqrt{2}$

21. Simplifique os radicais a seguir:

a) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2^{16}}}$ c) $\sqrt{b\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}$ d) $\left(\sqrt[5]{2^3}\right)^5$

22. Racionalize os denominadores das frações apresentadas:

a) $\dfrac{7}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$ c) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$ d) $\dfrac{9}{\sqrt[5]{2^3}}$ e) $\dfrac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{5}{3\sqrt{7}+\sqrt{2}}$

23. Escreva cada item a seguir como potência de expoente racional:

a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt[3]{2^8}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{3^2}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$ e) $\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{9}}\right)^2$ f) $\left(\sqrt[6]{7^2}\right)^3$

24. Faça a transformação de potências de expoentes racionais em radicais e, quando possível, obtenha os resultados de forma simplificada:

a) $27^{\frac{1}{3}}$ b) $2^{-\frac{1}{2}}$ c) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ d) $(0,81)^{\frac{1}{2}}$ e) $(0,27)^{-\frac{1}{2}}$ f) $\left(\dfrac{1}{100}\right)^{-0,5}$ g) $(27)^{-\frac{2}{3}}$

25. Qual é o valor da expressão $-7x+2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{5}}-5\sqrt[5]{5}+7x^0$, considerando que $x=25$?

26. Determine o valor de m, sabendo que $m=\left(\sqrt{1+5\cdot 4^{-1}}\right)^{-1}$.

27. (PUC-MG) Racionalizando-se a expressão $\dfrac{\sqrt{15}-1}{\sqrt{15}+1}$, obtém-se:

a) $(7-\sqrt{15})/8$ b) $(8-\sqrt{15})/7$ c) $(16-\sqrt{15})/14$
d) $(14-\sqrt{15})/16$ e) $(9-\sqrt{15})/13$

28. (UFMG) Em relação aos números reais, a alternativa correta é:

a) $3^{5^2}:3^5=3^5$ b) $\left(3^{3^9}\right)^{\frac{1}{9}}=3^3$ c) $\sqrt[8]{10^{2^6}}=10^{2^{\frac{3}{4}}}$
d) $\dfrac{8^{3^2}}{8^3}=8^6$ e) $\left(5^{-3}\cdot 7\right)^2=5^9\cdot 49$

29. (UFMG) Simplificando a expressão $\sqrt{9\times 10^{-6}}\cdot\sqrt{0,0049}\cdot\sqrt{2,5\times 10^3}$, obtém-se:

a) 105 b) 10,5 c) 1,05 d) 0,105 e) 0,0105

30. (PUC-MG) O valor de $m=\sqrt[7]{\sqrt[3]{2}}\cdot\left(\dfrac{3\sqrt{5^7}-\sqrt[6]{5^{21}}}{2\sqrt[3]{8}}\right)^{\frac{1}{21}}$ é:

a) $\sqrt[6]{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{5^7}$ d) $\dfrac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{2}}$ e) $\sqrt[3]{5}$

31. (UFMG) Seja $y=\dfrac{\sqrt[3]{1-7\times 2^{-3}}}{4^{-2}-2^{-2}}$. O valor de y é igual a:

a) $-\dfrac{8}{3}$ b) $-\dfrac{2}{3}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) 2

32. Assinale a afirmação **CORRETA**:

    a) $\pi^2 + \pi^3 = \pi^5$ b) $\sqrt{25} = \pm 5$ c) $0,3 \times 10^{-4} = 300 \times 10^{-7}$
    d) $-x$ representa um número negativo. e) $|a+b| = |a| + |b|$

33. (UFMG) A expressão $\dfrac{a^{-\frac{1}{9}} \cdot \left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^2}{-a^2} : \left(-\frac{1}{a}\right)^2$, com $a \neq 0$, é equivalente a:

    a) $-a^{\frac{5}{9}}$ b) $a^{\frac{5}{9}}$ c) $-a^{-\frac{7}{9}}$ d) $a^{\frac{7}{9}}$ e) $a^{-\frac{7}{9}}$

34. (UFMG) O valor de $m = \left[(-0,2)^3 + \dfrac{1}{25}\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{3^{\frac{1}{3}}}{5^{-\frac{1}{2}}}$ é:

    a) $\dfrac{2}{5}$ b) $\dfrac{2}{25}\sqrt[3]{3}$ c) $\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{3}$ d) $\dfrac{2}{5}\sqrt[3]{3}$ e) $2\sqrt[3]{3}$

35. Sejam as afirmações:

    I. $-5^0 = 1$ II. $\sqrt{4} = \pm 2$ III. $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{25}$ IV. $\sqrt{x^2} = x$

    Quantas são as verdadeiras?

    a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

36. Sendo $x < 0$, a expressão $y = \sqrt{x^2} - \sqrt[3]{x^3} + \sqrt[4]{x^4}$ vale:

    a) $-3x$ b) 0 c) $2x$ d) $3x$ e) x

37. (UFRGS) A expressão $\dfrac{5\sqrt[12]{64} - \sqrt{18}}{\sqrt{50} - \sqrt[4]{324}}$ é igual a:

    a) $\frac{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ b) $5\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $8\sqrt{2}$ e) 1

38. (OBMEP-2007, Nível 1 da Lista 3) ***Comparação de números -*** Escreva em ordem crescente os números: $\sqrt{121}$, $\sqrt[3]{729}$ e $\sqrt[4]{38416}$.

39. (OBMEP-2007, Nível 2 da Lista 1) ***Potências de 10-***O valor de $\frac{0{,}00001 \times (0{,}01)^2 \times 1000}{0{,}001}$ é:

    a) 10^{-1} b) 10^{-2} c) 10^{-3} d) 10^{-4} e) 1

40. (OBMEP-2007, Nível 2 da Lista 1) ***Uma expressão -*** A expressão $\dfrac{a^{-2}}{a^5} \times \dfrac{4a}{\left(2^{-1}a\right)^{-3}}$ onde $a \neq 0$, é igual a:

    a) $\frac{a^3}{2}$ b) $\frac{2}{a^3}$ c) $\frac{1}{2a^3}$ d) $\frac{a^5}{2}$ e) $\frac{2}{a^5}$

41. Sabe-se que um capital C aplicado a uma taxa de juros i, por um período de tempo t, gerará um montante ao final desse período que pode ser calculado pela equação $M = C \cdot (1+i)^t$. Sabendo-se que um capital de $R\$500,00$ foi aplicado a juros de 2% ao mês por um período de 1,5 ano, qual será o montante ao final desse tempo?

42. A distância entre o Sol e a Terra é de aproximadamente 150 milhões de quilômetros, ou seja, 150.000.000 km. Escreve esse valor em notação científica.

43. Em notação científica, qual é a representação do número 0,00000000000003?

44. É comum se considerar que um ano luz corresponde a 9.460.530.000.000 km. Qual é a representação dessa distância em notação científica?

45. (OBMEP - 2007, Nível 2 da Lista 7) ***Expressões com radicais*** - Qual é o valor de $\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}\right)^4$?

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ b) $\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})$ c) $1+2\sqrt{3}$ d) 3 e) $3+2\sqrt{2}$

46. (OBMEP - 2007, Nível 2 da Lista 7) ***Uma diferença*** - Qual é o valor de

$$\frac{\sqrt[3]{-0,001}\times\sqrt{400}}{\sqrt{0,25}}-\frac{\sqrt{0,036}-\sqrt{0,4}}{\sqrt{0,4}}?$$

a) $-3,3$ b) $-4,7$ c) $-4,9$ d) $-3,8$ e) $-7,5$

47. (PMMG) O valor de $\sqrt{9\%}$ é:

a) 9% b) 3 c) 9 d) 3% e) 30%

48. (Inatel - MG) O valor da expressão $\dfrac{0,05\cdot 0,75\cdot(0,5)^{-2}}{0,125\cdot(0,25)^{-1}}$ é equivalente a:

a) $0,5$ b) $1/5$ c) 5^2 d) $3/5$ e) $3/10$

49. (PUC-MG) Se $2^n=15$ e $2^p=20$, o valor de 2^{n-p+3} é:

a) 6 b) 8 c) 14 d) 16

50. (Unifor - CE) A expressão $\dfrac{0,375\cdot 10^{-12}}{0,0125\cdot 10^{-8}}$ é equivalente a:

a) $0,03\%$ b) $0,15\%$ c) $0,3\%$ d) $1,5\%$ e) 3%

51. (Fatec-SP) Se x e y são números reais tais que $x=(0,25)^{0,25}$ e $y=16^{-0,125}$, é verdade que:

a) $x=y$ b) $x>y$ c) $x\cdot y=2\sqrt{2}$
d) $x-y$ é um número irracional. e) $x+y$ é um número racional não inteiro.

52. (UFRGS) Durante os jogos Pan-Americanos de Santo Domingo, os brasileiros perderam o ouro para os cubanos por 37 centésimos de segundo nas provas de remo. Dentre as alternativas, o valor mais próximo desse tempo, medido em horas, é:

a) $1,03\cdot 10^{-4}$ b) $1,3\cdot 10^{-4}$ c) $1,03\cdot 10^{-3}$ d) $1,3\cdot 10^{-3}$ e) $1,03\cdot 10^{-2}$

53. (Fuvest-SP) Se $4^{16}\cdot 5^{25}=\alpha\cdot 10^n$, com $1\leq\alpha<10$, então n é igual a:

a) 24 b) 25 c) 26 d) 27 e) 28

54. (UFAL) A expressão $\sqrt{10+\sqrt{10}}\cdot\sqrt{10-\sqrt{10}}$ é igual a:

a) 0 b) $\sqrt{10}$ c) $10-\sqrt{10}$ d) $3\sqrt{10}$ e) 90

55. (Inatel - MG) Sendo $A = \sqrt[3]{10 - \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{8}}}$ e $B = \sqrt{7 + \sqrt{7 - \sqrt{9}}}$, calcule o valor de $\sqrt{A^4 + B^2}$.

56. (UEPB) Calculando o valor de $9^{-0,3333\ldots}$, obtemos:

    a) $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ c) $\sqrt[3]{3}$ d) $\sqrt[3]{2}$ e) $\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$

57. No Exemplo 3.11 vimos que o crescimento da população do Brasil em certo período de tempo pode ser obtido pelo modelo logístico

$$y(t) = \frac{257 \cdot 10^6}{1 + 0,51 \cdot e^{-0,04t+80}}.$$

    A estimativa oficial do IBGE para a população brasileira no ano de 2017 é de 207.660.929 habitantes[iv]. Use o modelo logístico e uma calculadora científica para:

    a) estimar a população brasileira no ano de 2017.
    b) calcular a diferença percentual da população estimada pelo modelo logístico em relação à estimativa do IBGE.

58. (UTFPR) Considere as seguintes expressões:

    I. $\frac{3\sqrt{12}}{2} = 3\sqrt{2}$
    II. $\left(2\sqrt{3}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{6}$
    III. $\left(2^4\right)^{1/2} = 2\sqrt{2}$

    É (são) verdadeira(s), somente:

    a) I. b) II. c) III. d) I e II. e) I e III.

[iv] Esse número populacional foi obtido na referência [23].

CAPÍTULO 4

Introdução ao conjunto dos Números Complexos

Nessa seção, apresentaremos apenas o que é fundamental se saber sobre números complexos (representado pelo símbolo $\mathbb{C}$) para o estudo de polinômios e os outros tópicos relacionados nesse livro. O que será apresentado refere-se apenas a uma sucinta introdução a esse conjunto, onde se abordam a sua definição e algumas propriedades e operações.

4.1 Introdução

Ao se tentar resolver a equação[i]

$$x^2 + 1 = 0 \tag{4.1}$$

conclui-se que a solução só existirá se $x^2 = -1$.

Contudo, sabe-se que não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$, pois isso significaria que $x = \pm\sqrt{-1}$, o que implica que a Equação (4.1) não possui solução em $\mathbb{R}$.

Portanto, para que seja possível considerar a solução de equações que tenham essa complicação, é necessário considerar que fora do conjunto dos reais exista um número que ao ser elevado ao quadrado resulte em -1.

Esse número será representado por i e chamado de ***unidade imaginária***. Logo, tem-se que

$$i^2 = -1 \quad \text{ou} \quad i = \sqrt{-1},$$

e que a solução da Equação (4.1) é $x = \pm i$.

Ao se adicionar a unidade imaginária ao conjunto dos reais, obtém-se um novo conjunto que será denominado conjunto dos números complexos, representado por $\mathbb{C}$. Contudo, para que as operações usuais dos reais possam ser realizadas de maneira similar em $\mathbb{C}$, e para que valha o fechamento para soma e para o produto nesse novo conjunto, define-se que

$$\mathbb{C} := \{z = a + bi \mid a,\ b \in \mathbb{R}\},$$

onde $a = Re(z)$ e $b = Im(z)$ são chamados, respectivamente, de partes real e imaginária de z.

---

[i] Originalmente os números complexos surgiram no período do Renascimento, na Europa, quando se tentava obter a resolução de equações da forma $x^3 + px + q = 0$.

Exemplo 4.1 *Seguem alguns complexos e suas respectivas partes real e imaginária.*

a) $z_1 = 2+3i$, sendo que $Re(z_1) = 2$ e $Im(z) = 3$.

b) $z_2 = 3-2i$, sendo que $Re(z_2) = 3$ e $Im(z_2) = -2$.

c) $z_3 = -5-i$, onde $Re(z_3) = -5$ e $Im(z_3) = -1$.

d) $z_4 = -6i$, com $Re(z_4) = 0$ e $Im(z_4) = -6$.

e) $z_5 = \sqrt{2}i$, com $Re(z_5) = 0$ e $Im(z_5) = \sqrt{2}$.

Observação 4.1

a) Considere $x \in \mathbb{R}$. Então, é claro que pode-se escrever que $x = x + 0i \in \mathbb{C}$, o que implica que todo número real é um número complexo, ou seja, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

b) Tome um número complexo $z = a + bi$ em que $b \neq 0$ e $a = 0$, ou seja, quando $z = bi$. Nessas condições, z é chamado de ***imaginário puro***.

c) Todos os números $z = a + bi$ com $b \neq 0$ são chamados de ***números imaginários***.

Definição 4.1 (Complexo conjugado) *Dado um número complexo $z = a + bi$, define-se como complexo conjugado de z o número complexo dado por $\overline{z} = a - bi$.*

Exemplo 4.2 *Sejam $z_1 = -3+7i$ e $z_2 = 4-3i$. Então, $\overline{z_1} = -3-7i$ e $\overline{z_2} = 4+3i$.*

Propriedades 4.1 *Sejam z, z_1 e z_2 números complexos quaisquer. Então, é válido que:*

a) $\overline{\overline{z}} = z$ *b)* $z + \overline{z} = 2 \cdot Re(z)$ *c)* $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ *d)* $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

As demonstrações das Propriedades 4.1 são relativamente simples de serem realizadas e são deixadas como exercício (Vide Exercício 11).

Para que as propriedades associativa, comutativa e distributiva sejam válidas para a adição e a multiplicação em $\mathbb{C}$ assim como são válidas em $\mathbb{R}$, a igualdade de complexos, assim como a adição e a multiplicação são definidas como se segue:

4.2 Igualdade de complexos

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ números complexos quaisquer. Define-se a igualdade entre eles da seguinte forma

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

Exemplo 4.3 *Considere $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tais que $z_1 = 4k + 5i$, com $k \in \mathbb{R}$, e $z_2 = 2 + (8k+1)i$. Sabendo que $z_1 = z_2$, determine os valores de k e da $Im(z_2)$.*

Resolução: Pela definição de igualdade de complexos, para que se tenha $z_1 = z_2$ é necessário que

$$4k = 2 \Longrightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Então, como $Im(z_2) = 8k + 1 = 8 \cdot \frac{1}{2} + 1$, segue que $Im(z_2) = 5$. Outra forma de se chegar a esse resultado é observar que $Im(z_2) = Im(z_1) = 5$.

4.3 Adição e multiplicação de complexos

Dados os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, define-se $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$ da seguinte forma

$$z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i \quad \text{e} \quad z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Já a **subtração** de complexos é definida a partir da adição e do oposto (ou simétrico) de um complexo. O oposto de um complexo qualquer $z = a + bi$ é o complexo $-z = -a - bi$. Logo, $z_1 - z_2$ é definida como a adição de z_1 com o oposto de z_2, isto é

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a - c) + (b - d)i.$$

Exemplo 4.4 *Efetue as operações indicadas, considerando que* $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + \frac{i}{3}$ *e* $z_3 = -5i$.

a) $z_1 + z_2$ b) $z_2 - z_1$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $(z_1 - z_2) \cdot z_3$

Resolução:

a) $z_1 + z_2 = 2 + 3i + \left(-1 + \frac{i}{3}\right) = (2 - 1) + \left(3 + \frac{1}{3}\right) i = 1 + \frac{10}{3} i.$

b) $z_2 - z_1 = z_2 + (-z_1) = -1 + \frac{i}{3} + (-2 - 3i) = (-1 - 2) + \left(\frac{1}{3} - 3\right) i = -3 - \frac{8}{3} i.$

c) $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)\left(-1 + \frac{i}{3}\right) = \left(2 \cdot (-1) - 3 \cdot \frac{1}{3}\right) + \left(2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot (-1)\right) i = -3 - \frac{7}{3} i.$

d) $(z_1 - z_2) \cdot z_3 = \left(2 + 3i + 1 - \frac{i}{3}\right) \cdot (-5i) = \left(3 + \frac{8}{3} i\right) \cdot (-5i) = \frac{40}{3} - 15i.$

4.4 Potências de i

Assim como já é considerado para todos os reais, consideraremos que qualquer complexo não nulo elevado a 0 (zero) é igual a 1. Portanto, como $i = \sqrt{-1}$, vem que:

$$i^0 = 1, \qquad i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \qquad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1,$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i, \qquad i^6 = i^5 \cdot i = -1, \qquad i^7 = i^6 \cdot i = -i, \ \ldots$$

É possível observar que, a cada quatro potências o resultado volta a se repetir, ou seja, as potências da unidade imaginária são cíclicas. Logo, pode-se dizer que só existem quatro valores distintos para potências de i, que são:

$$i^0 = 1, \qquad i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \quad \text{e} \quad i^3 = -i.$$

Desta forma, para calcular a potência i^n basta considerar que $i^n = i^r$ onde r é o resto da divisão de n por 4.

Exemplo 4.5 *Determine o valor de* $i^{231} + i^{341}$.

Resolução: Na divisão de 231 e 342 por 4 obtém-se restos iguais a 3 e 1, respectivamente. Portanto,

$$i^{231} + i^{342} = i^3 + i^1 = -i + i = 0.$$

4.5 Raiz quadrada de um número negativo

A raiz quadrada[ii] de um número real negativo $-a$ é definida como o número complexo s tal que $s^2 = -a$. Seja então $-a \in \mathbb{R}$ sendo $a > 0$. Observe que

$$\left(\sqrt{a} \cdot i\right)^2 = \left(-\sqrt{a} \cdot i\right)^2 = -a.$$

Então define-se que as raízes quadradas de $-a$ são os complexos $\sqrt{a} \cdot i$ e $-\sqrt{a} \cdot i$.

Exemplo 4.6 *As raizes quadradas de* $\sqrt{-25}$ *são* $5i$ *e* $-5i$. *De outra forma:*

$$\sqrt{-25} = \pm\sqrt{25} \cdot i = \pm 5i = \{5i, -5i\}.$$

Esse resultado permite que, por exemplo, as raízes de uma equação do segundo grau (ou função polinomial quadrática),

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

que são dadas pela ***Fórmula de Bhaskara***

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

e representam os valores de x que satisfazem a equação, possam ser encontradas mesmo que o valor do discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$, seja negativo. Separadamente, temos que as raízes são

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Além disso, como não fará diferença nos resultados, nesses casos é comum considerar que $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot i$.

Exemplo 4.7 *Obtenha as raízes das seguintes equações quadráticas:*

a) $x^2 + 2x + 5 = 0$ *b)* $-2x^2 - 8x - 20 = 0$

Resolução:

a) Em $x^2 + 2x + 5 = 0$ tem-se que $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$. Logo, considerando que $\sqrt{-16} = 4i$ vem que

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{-16}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{-2 - \sqrt{-16}}{2} \Longrightarrow x_1 = \frac{-2 + 4i}{2} \text{ e } x_2 = \frac{-2 - 4i}{2}.$$

$$\Longrightarrow x_1 = -1 + 2i \quad \text{e} \quad x_2 = -1 - 2i.$$

ii De maneira mais geral, todo número complexo $z \neq 0$ possui exatamente n raízes n-ésimas distintas, conforme é garantido pela fórmula de *De Moivre*. Para detalhes, vide [24, p. 15-19].

b) Para $-2x^2-8x-20=0$ tem-se que $\Delta=(-8)^2-4\cdot(-2)\cdot(-20)=64-160=-96<0$. Logo,

$$x_1=\frac{8+\sqrt{-96}}{-4} \text{ e } x_2=\frac{8-\sqrt{-96}}{-4} \Longrightarrow x_1=\frac{8+4\sqrt{6}i}{-4} \text{ e } x_2=\frac{8-4\sqrt{6}i}{-4}.$$

$$\Longrightarrow x_1=-2-\sqrt{6}i \quad \text{e} \quad x_2=-2+\sqrt{6}i.$$

Observe que a equação $-2x^2-8x-20=0$ também poderia ser resolvida fazendo-se, inicialmente, a divisão de ambos os lados da igualdade por 2, gerando a equação equivalente dada por $-x^2-4x-10=0$, o que reduziria os valores obtidos e, portanto, deixaria os cálculos um pouco mais simples.

Observação 4.2 (Sobre o conjunto universo das equações) *Atente para o fato de que, se as equações do exemplo anterior tivessem que ser resolvidas no universo $\mathbb{R}$, elas não possuiriam raízes, ou seja, suas soluções seriam vazias. Contudo, no universo dos números complexos, $\mathbb{C}$, essas soluções existem. Portanto, é importante identificar em qual universo de soluções se está trabalhando, para verificar se uma determinada equação terá ou não solução.*

4.6 Exercícios

1. Obtenha $Re(z)$ e $Im(z)$ para cada caso:

   a) $z=-3+7i$

   b) $z=\frac{9-7i}{3}$

   c) $z=-\frac{1+8i}{2}$

   d) $z=5\pi+\sqrt{11}i$

2. Efetue as operações indicadas:

   a) $(3+5i)+(2-4i)$

   b) $(1-5i)+(2+7i)-3i$

   c) $(4-7i)-\left(-\frac{3}{4}+\frac{2}{5}i\right)$

   d) $(3+6i)(-2-9i)$

   e) $(3+2i)(3-2i)$

   f) $(4-3i)^2$

3. Dados $z_1=2+8i,\ z_2=\frac{1}{2}-2i,\ z_3=1+\frac{1}{2}i$ e $z_4=\frac{3}{4}-i$, calcule o que se pede:

   a) $z_1\cdot z_2$

   b) $2z_3-3i\cdot z_4$

   c) $z_3\cdot z_4$

   d) $z_4\cdot z_2\cdot z_1$

4. Obtenha as raízes das seguintes equações quadráticas:

   a) $2x^2+6x+5=0$

   b) $x^2+9=0$

   c) $4x^2-4x+2=0$

   d) $y^2-5y+25=0$

5. Escreva as equações na forma fatorada.

   a) $x^2-14x+50=0$

   b) $2y^2-4iy+6=0$

6. (UFU) Sejam os complexos $z = 2x - 3i$ e $t = 2 + yi$, onde $x, y \in \mathbb{R}$. Se $z = t$, então o produto $x \cdot y$ é:

   a) 6 b) 4 c) 3 d) -3 e) -6

7. Determine $x, y \in \mathbb{R}$ para que se $z_1 \cdot z_2 = z_3$, sendo $z_1 = x + yi$, $z_2 = 6 + 8i$ e $z_3 = 14 + 52i$.

8. (UFPA) Qual o valor de m, real, para que o produto $(2 + mi)(3 + i)$ seja imaginário puro?

   a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 10

9. (UCSal) Para que o produto $(a + i)(3 - i)$ seja real, qual deve ser o valor de a?

10. (UFES) Simplificando-se a expressão $E = i^7 + i^5 + \left(i^3 + 2i^4\right)^2$ tem-se que:

    a) $E = -1 + 2i$ b) $E = 1 + 2i$ c) $E = 1 - 2i$ d) $E = 3 - 4i$ e) $E = 3 + 4i$

11. Mostre que se z, z_1 e z_2 são números complexos quaisquer, então:

    a) $\overline{\overline{z}} = z$ b) $z + \overline{z} = 2 \cdot Re(z)$ c) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ d) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

12. (UFV - *modificada*) Considerando que o módulo de um complexo é definido por $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, dadas as alternativas abaixo:

    I. $i^2 = 1$ II. $(i + 1)^2 = 2i$ III. $|4 + 3i| = 5$ IV. $(1 + 2i)(1 - 2i) = 5$

    pode-se dizer que:

    a) todas as alternativas acima estão corretas;
    b) todas as alternativas acima estão erradas;
    c) as alternativas I e III estão erradas;
    d) as alternativas II, III e IV estão corretas;
    e) as alternativas I e III estão corretas.

CAPÍTULO 5

Polinômios

5.1 Monômios

Definição 5.1 *Um monômio nas variáveis* $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_k$ *é qualquer expressão da forma*

$$ax_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k},$$

sendo que $a \in \mathbb{C}$ *é o coeficiente e* $n_1,\ n_2,\ \dots,\ n_k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 5.1 *Vejamos alguns exemplos de monômios:*

$$12ixy,\quad -4abc,\quad \frac{2}{3}ax,\quad \frac{2}{5}xy,\quad 3ix,\quad 7x,\quad 9xy^2.$$

Definição 5.2 *Em um monômio a parte numérica é denominada de* ***coeficiente*** *e a parte composta pelas variáveis é chamada de* ***parte literal****.*

Exemplo 5.2 *O monômio* $3ixy$ *tem coeficiente igual a* $3i$ *e parte literal igual a* xy*. Já o monômio* $-2ab$ *tem coeficiente* -2 *e parte literal* ab*.*

Definição 5.3 *Quando dois ou mais monômios possuem a mesma parte literal, o denominamos* ***semelhantes****.*

Exemplo 5.3 *Os monômios* $3xy,\ -2ixy$ *e* $-6xy$ *são semelhantes, já que todos possuem a mesma parte literal,* xy*.*

Definição 5.4 (Grau de um monômio) *Seja o monômio* $P = ax_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$*. Define-se o grau de P, e simbolíza-se por* $g_r(P)$*, à soma dos expoentes das variáveis, isto é*

$$g_r(P) = n_1 + n_2 + \cdots + n_k.$$

Se $P = 0$*, monômio nulo, diremos que ele não tem grau e se* $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 0$ *com* $a \neq 0$*, diremos que o* $g_r(P) = 0$*.*

Exemplo 5.4 *Sejam os monômios* $P(a,b) = -2a^2b$*,* $Q(x,y,z) = x^2yz^3$ *e* $R = -13i$*. Então,* $g_r(P) = 2+1 = 3,\ g_r(Q) = 2+1+3 = 6$ *e* $g_r(R) = 0$*.*

Definição 5.5 (Monômio em uma variável) *Um monômio em uma variável x é qualquer expressão da forma*

$$M = ax^n$$

sendo $a \in \mathbb{R}$ o coeficiente e $n \in \mathbb{N}$. Se $a \neq 0$, então $g_r(M) = n$ e se $a = 0$ diz-se que M não tem grau.

Exemplo 5.5 *Considere os monômios em uma variável: $M = -2ix$, $N = 3x^4$, $P = 4$ e $Q = 0x^2$. Então, $g_r(M) = 1$, $g_r(N) = 4$, $g_r(P) = 0$ e $\nexists\ g_r(Q)$.*

5.2 Operações elementares com monômios

Aqui definiremos as principais operações possíveis com monômios, que são: adição, multiplicação, divisão e potenciação. Essas operações serão úteis para o entendimento das operações realizadas nos produtos notáveis e em polinômios.

Adição e subtração

A adição (ou subtração) entre monômios só é permitida se eles forem semelhantes. Ela é definida pela conservação da parte literal e soma (ou subtração) dos coeficientes. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 5.6

a) $-5xy^2 + 3xy^2 - 8xy^2 = (-5+3-8)xy^2 = -10xy^2$.

b) $\frac{1}{3}w - \frac{2}{3}w = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)w = w$.

c) $\frac{2ab}{3} + \frac{9ab}{4} - \frac{3ab}{2} = \left(\frac{2}{3} + \frac{9}{4} - \frac{3}{2}\right)ab = \frac{17}{12}ab$.

Antes de tratarmos da multiplicação de monômios, vamos definir a **multiplicação de um escalar (número real qualquer) por um monômio**. Essa multiplicação é feita simplesmente pela conservação da parte literal e multiplicação do escalar pelo coeficiente do monômio. Vejamos o exemplo:

Exemplo 5.7 *Sejam os escalares $\alpha = 3i$ e $\beta = -1/10$. Então, dado o monômio $M(x,y) = 5ixy$, segue que*

$$\alpha \cdot M = (3i \cdot 5i)\,xy = -15xy \quad \text{e} \quad \beta \cdot M = \left(-\frac{1}{10} \cdot 5i\right)xy = -\frac{5}{10}ixy = -\frac{i}{2}xy.$$

Observação 5.1 *Atente que, da forma como o produto entre um escalar e um monômio foi definido, dado um monômio qualquer M, é sempre possível obter um monômio $-M = -1 \cdot M$, tal que $M + (-M) = 0$. O monômio $-M$ é denominado **oposto** ou **simétrico** de M.*

Definição 5.6 *A diferença entre dois monômios P e M é definida por*

$$P - M = P + (-M).$$

Fazendo-se assim, percebe-se que a subtração entre os monômios P e M, é na realidade, a soma entre P e o inverso de M. Vejamos o Exemplo 5.8.

Exemplo 5.8 *Sejam $P(a,b) = 3a^2b$ e $M(a,b) = -4a^2b$. Então, $-M = 4a^2b$ e*

$$P - M = P + (-M) = 3a^2b + 4a^2b = 7a^2b.$$

Multiplicação

A multiplicação de monômios é feita multiplicando-se os coeficientes e também as partes literais, sendo que, na multiplicação das variáveis de mesma base, deve-se conservar a base e efetuar a soma dos expoentes, obedecendo a regra do produto de potências de mesma base.

Exemplo 5.9 *Efetue os produtos indicados.*

a) $-3ix^2y \cdot 2ix^3y^2 = (-3i \cdot 2i) \cdot (x^2x^3) \cdot (yy^2) = 6x^5y^3$

b) $4w \cdot 5ix^2yw^3 = (4 \cdot 5i) \cdot x^2y \cdot (ww^3) = 20ix^2yw^4$

c) $2x \cdot (-x) = [2 \cdot (-1)] \cdot xx = -2x^2$

Divisão

A divisão de monômios é feita dividindo-se os coeficientes (ou representando a divisão como frações) e também as partes literais, sendo que, ao se operar com as partes literais, deve-se conservar a base e efetuar a diferença entre os expoentes, conforme regra da divisão de potências de mesma base.

Exemplo 5.10 *Efetue as divisões solicitadas e apresente os resultados da forma mais simplificada possível.*

a) $-\dfrac{7x^2y^4}{14xy^3} = -\dfrac{7}{14} \cdot \dfrac{x^2}{x} \cdot \dfrac{y^4}{y^3} = -\dfrac{1}{2}xy$

b) $\dfrac{-8a^4}{-4a} = \dfrac{-8}{-4} \cdot \dfrac{a^4}{a} = 2a^3$

Potenciação

A potência de um monômio é obtida elevando elevando-se coeficiente e parte literal ao expoente indicado, usando a propriedade de potência de potência. Isto é, se $\alpha \in \mathbb{N}$ e $M = ax_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$, então

$$M^\alpha = a^\alpha x_1^{\alpha n_1}x_2^{\alpha n_2}\cdots x_k^{\alpha n_k}.$$

Exemplo 5.11 *Considerando os monômios $-2x^2y^3z$ e $3ab^4c^2$, temos que:*

$$\left(-2x^2y^3z\right)^3 = (-2)^3x^{2\cdot 3}y^{3\cdot 3}z^3 = -8x^6y^9z^3$$

e

$$\left(3ab^4c^2\right)^5 = 3^5a^5b^{4\cdot 5}c^{2\cdot 5} = 243a^5b^{20}c^{10}.$$

5.3 Produtos notáveis

Alguns produtos de expressões aparecem frequentemente no estudo dos polinômios e são de extrema importância na matemática. Aos principais deles damos o nome de produtos notáveis. Estudaremos nessa seção os cinco principais produtos notáveis, para isso, considere dois números complexos genéricos, x e y.

Quadrado da soma de dois termos

O quadrado da soma desses termos é dado por

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

já que em $\mathbb{C}$ a multiplicação é comutativa. Logo, temos que[i]

$$\boxed{(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$$

Observação 5.2 *O quadrado da soma de dois termos tem uma interpretação geométrica muito interessante e que vale a pena ser apresentada nesse texto. Imagine um quadrado de lado* $(x+y)$*, com* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$*, conforme indicado na Figura 1.*

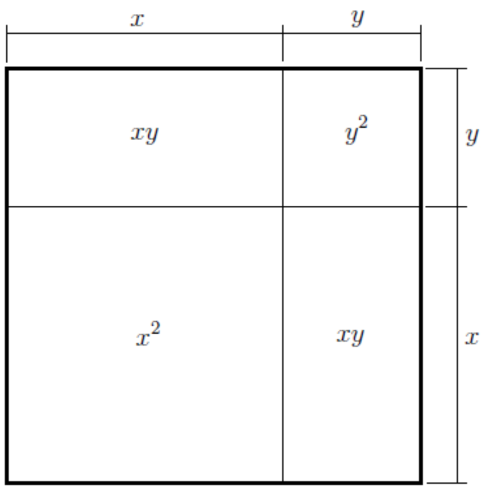


Figura 1 – Interpretação geométrica do quadrado da soma de dois termos.

Então, a área desse quadrado é dada por $(x+y)^2$*. Observe, ainda, que ela também pode ser escrita como o somatório das áreas dos dois quadrados internos,* x^2 *e* y^2*, com as áreas dos dois retângulos, ambas iguais a* xy*, também internos. Sendo assim, segue que* $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$*.*

Quadrado da diferença de dois termos

Se ao invés de considerarmos a soma dos termos como fizemos no tópico anterior, considerarmos a diferença, tem-se que

i É comum alguns alunos considerarem que $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ e que $(x-y)^2 = x^2 - y^2$. Esperamos que você não cometa esse erro de agora em diante!

$$(x-y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2 - xy - yx + y^2 = x^2 - 2xy + y^2.$$

Então,

$$\boxed{(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2}$$

Produto da soma pela diferença de dois termos

O produto da soma pela diferença dos termos x e y é tal que

$$(x+y)(x-y) = x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2.$$

Logo,

$$\boxed{(x+y)(x-y) = x^2 - y^2}$$

Cubo da soma e da diferença de dois termos

Considerando, ainda, os dois termos x e y, tem-se que:

$$\boxed{(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3} \quad \text{e} \quad \boxed{(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}$$

A tarefa de verificar essas duas relações será deixada como exercício para o leitor.

Exemplo 5.12 *Desenvolva os produtos notáveis* $(x+4)^2$, $(3-y)^2$, $(2a+2)(2a-2)$, $(2+x)^3$ *e* $(a-y)^3$.

a) $(x+4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16.$

b) $(3-y)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot y + y^2 = 9 - 6y + y^2 = y^2 - 6y + 9.$

c) $(2a+\sqrt{3})(2a-\sqrt{3}) = (2a)^2 - (\sqrt{3})^2 = 4a^2 - 3.$

d) $(2+x)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot x + 3 \cdot 2 \cdot x^2 + x^3 = 8 + 12x + 6x^2 + x^3$

e) $(a-y)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot y + 3 \cdot a \cdot y^2 - y^3 = a^3 - 3a^2y + 3ay^2 - y^3$

5.4 Polinômios

Definição 5.7 *Um polinômio P, ou função polinomial, sobre $\mathbb{C}$, é toda função da forma*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

com coeficientes a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, $\ldots$, a_2, a_1, a_0 em $\mathbb{C}$, para todo $x \in \mathbb{C}$. As parcelas $a_n x^n$, $a_{n-1}x^{n-1}$, $\ldots$, $a_1 x$ e a_0, são denominadas termos do polinômio.

Exemplo 5.13

a) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6i$, onde $a_3 = 1, a_2 = -6, a_1 = 11$ e $a_0 = -6i$.

b) $P(x) = 7x^4 - 3ix^2 + 1$, onde $a_4 = 7, a_3 = 0, a_2 = -3i, a_1 = 0$ e $a_0 = 1$.

Valor numérico de um polinômio

O valor numérico de um polinômio P para $x=\epsilon$, indicado por $P(\epsilon)$, é o resultado obtido substituindo x por ϵ e efetuando as operações indicadas. Portanto, temos que:

$$P(\epsilon)=a_n\epsilon^n+a_{n-1}\epsilon^{n-1}+a_{n-2}\epsilon^{n-2}+\ldots+a_2\epsilon^2+a_1\epsilon+a_0$$

Exemplo 5.14 *Considere* $P(x)=2x^3-4x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}$. *Então,*

$$P(-1)=2(-1)^3-4(-1)^2+\frac{2}{3}(-1)+\frac{2}{3}=-2-4=-6.$$

Logo, o valor numérico de P *para* $x=-1$ *é* -6, *ou seja* $P(-1)=-6$.

Raiz de um polinômio

Quando $P(\epsilon)=0$ dizemos que ϵ é uma raiz (ou um zero) do polinômio P, isso é

$$\epsilon \text{ é } raiz\ de\ P(x) \Longleftrightarrow P(\epsilon)=0.$$

Exemplo 5.15 *Dado* $P(x)=2x^4+2ix^3+x+i$, *observe que* $-i$ *é raiz de* P, *enquanto 1 e -1 não são, já que apenas* $P(-i)=0$*:*

a) $P(-i)=2(-i)^4+2i(-i)^3+(-i)+i=2\cdot1+2i\cdot i-i+i=0$
b) $P(1)=2\cdot1^4+2i\cdot1^3+1+i=2+2i+1+i=3i+3$
c) $P(-1)=2\cdot(-1)^4+2i(-1)^3+(-1)+i=2-2i-1+i=1-i$

Exemplo 5.16 *Considere o polinômio* $P(x)=x^2-4x+5$. *Tem-se que* $P(2-i)=P(2+i)=0$, *ou seja, os complexos* $z_1=2+i$ *e* $z_2=2-i$ *são raízes de* $P(x)$.

No Exemplo 5.16 observe que $z_2=\overline{z_1}$, ou seja, tanto o número complexo z_1 quanto o seu conjugado, z_2, são raízes de um polinômio com coeficientes reais. Esse fato não é por acaso, pois existe um teorema que garante que isso sempre acontece.

Teorema 5.1 (Raízes complexas de um polinômio) *Seja* $p(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$ *um polinômio com coeficientes reais. Se o número complexo* $z=a+bi$ *é raiz de* p, *então* $\overline{z}=a-bi$ *também é raiz desse polinômio.*

Polinômio nulo

Dizemos que um polinômio P é identicamente nulo (ou simplesmente *nulo*) quando ele assumir valor numérico zero $\forall\ x\in\mathbb{C}$, ou seja,

$$P=0 \Longleftrightarrow P(x)=0\ \forall\ x\in\mathbb{C}.$$

Para que um polinômio seja nulo é necessário que todos os seus coeficientes também sejam nulos. Esse resultado será apresentado pelo Teorema 5.2 e sua demonstração pode ser obtida em [25].

Teorema 5.2 *Seja o polinômio* $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$. *Então,*

$$P=0 \quad\Longleftrightarrow\quad a_n=a_{n-1}=\ldots=a_2=a_1=a_0=0.$$

Exemplo 5.17 *Sejam* $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$ *e* i *a unidade imaginária. Para que o polinômio* $P(x) = (a-4i)x^3 - 2ibx^2 + 5(c+6)x + d$ *seja identicamente nulo, é necessário que seus coeficientes sejam nulos. Logo, deve-se ter:*

$$a - 4i = 0 \Rightarrow a = 4i, \quad -2ib = 0 \Rightarrow b = 0, \quad 5(c+6) = 0 \Rightarrow c = -6 \quad \text{e} \quad d = 0.$$

Igualdade entre polinômios

Dois polinômios P e Q são denominados iguais (ou idênticos) quando assumem valores iguais para todo complexo x, ou seja,

$$P = Q \Longleftrightarrow P(x) = Q(x),\ \forall\ x \in \mathbb{C}.$$

Também é possível provar que a igualdade entre P e Q acontece se, e somente se, os coeficientes desses polinômios forem ordenadamente iguais. Matematicamente isso significa que se

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{e} \quad Q(x) = b_n x^n + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0,$$

então

$$P = Q \Longleftrightarrow a_0 = b_0,\ \ a_1 = b_1,\ \ a_2 = b_2,\ \ \ldots,\ \ a_{n-1} = b_{n-1},\ \ a_n = b_n.$$

Exemplo 5.18 *Dados os polinômios* $f(x) = (a-1)x^2 + bx + c$ *e* $g(x) = 2ax^2 + 2bx - c$*, quais são as condições para que se tenha a identidade* $f(x) = g(x)$*?*

Resolução: Para que a igualdade aconteça é necessário que os coeficientes dos polinômios f e g sejam ordenadamente iguais, isso é:

$$\left\{\begin{array}{ccc} a-1 & = & 2a \\ b & = & 2b \\ c & = & -c \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccr} 2a-a & = & -1 \\ b-2b & = & 0 \\ c+c & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccr} a & = & -1 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array}\right. .$$

Grau de um polinômio

Definição 5.8 *Dado um polinômio* $P(x)$ *com pelo menos um termo de coeficiente não nulo, o grau de* P *é o maior dos expoentes da variável* x *nos termos com coeficientes não nulos, indicado por* $gr(P)$ *ou* ∂P*. Se* P *tem todos os coeficientes nulos, não se define o grau de* P*.*

Matematicamente, temos que se $a_n \neq 0$ em

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

então,

$$gr(P) = n.$$

Exemplo 5.19 *Observe o grau de cada polinômio apresentado:*

a) $P(x) = -9x^5 + 3x^4 + x^3 - x^2 + 4 \Longrightarrow gr(P) = 5$

b) $R(x) = 0x^2 - 0x + 0 \Longrightarrow \nexists\, gr(R)$

c) $S(x) = 8 \Longrightarrow \partial S = 0$

d) $T(x) = ax + b,\ b \neq 0 \Longrightarrow gr(T) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{se } a \neq 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \end{array}\right.$

Exemplo 5.20 *Analise o grau do polinômio* $f(x) = (a+3)x^3 - 4x^2 + 1$ *com* $a \in \mathbb{R}$.

Resolução: Observe que o coeficiente de x^3 depende do valor de a e os coeficientes dos outros termos são todos não nulos. Logo, se $a+3=0$ tem-se que o grau de f será 2 e se $a+3 \neq 0$ o grau de f será 3.

$$\therefore\ gr(f) = \begin{cases} 2 & \text{se } a = -3 \\ 3 & \text{se } a \neq -3 \end{cases}.$$

5.5 Adição e subtração de polinômios

Adição

Dados dois polinômios $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ e $Q(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$, a adição entre eles é dada por

$$(P+Q)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)\, x^k = (a_n + b_n)\, x^n + \ldots + (a_1 + b_1)\, x + (a_0 + b_0)$$

Exemplo 5.21 *Observe as adições de polinômios e perceba que eles, não necessariamente, precisam ter o mesmo grau para serem adicionados.*

a) Sejam $f(x) = -3x^3 - 7ix^2 + 2x + i$ e $g(x) = 4x^3 - 2ix^2 + 3x - 2i$. Logo:

$$(f+g)(x) = (-3+4)x^3 + (-7i - 2i)x^2 + (2+3)x + (i - 2i)$$

$$\Longrightarrow (f+g)(x) = x^3 - 9ix^2 + 5x - i$$

b) Dados $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - x + i$ e $Q(x) = -2x^2 - 2x - 1$. Então:

$$(P+Q)(x) = (2+0)x^4 + (5+0)x^3 + (-1-2)x + (i-1)$$

$$\Longrightarrow (P+Q)(x) = 2x^4 + 5x^3 - 3x + (i-1)$$

Da forma como a adição de polinômios é definida, segue que o conjunto de todos os polinômios na variável $x \in \mathbb{C}$, que designaremos aqui por K, possui as seguintes propriedades:

Propriedades 5.1

A_1: (Associativa) $f + \big(g+h\big) = \big(f+g\big) + h,\ \forall\ f,\ g,\ h \in K$.

A_2: (Comutativa) $f + g = g + f,\ \forall\ f,\ g \in K$.

A_3: (Elemento neutro) $\exists\ q = 0 \in K$ tal que $f + q = q + f = f,\ \forall\ f \in K$. Sendo assim, o polinômio nulo é o elemento neutro da adição de polinômios.

A_4: (Inverso aditivo) $\forall\ f = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in K$, $\exists\ -f = -a_n x^n - \ldots - a_1 x - a_0 \in K$ tq $f + (-f) = 0$. O polinômio $-f$ é chamado inverso aditivo (ou oposto) de f.

As demonstrações das Propriedades 5.1 podem ser encontradas na referência [25], e é a partir da propriedade A_4 que se define a operação de subtração de polinômios.

Subtração

A subtração entre $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ e $Q(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$ é definida por

$$\begin{aligned}(P-Q)(x) &= [P+(-Q)](x)\\ &= \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)\, x^k\\ &= (a_n - b_n)\, x^n + \ldots + (a_1 - b_1)\, x + (a_0 - b_0)\end{aligned}$$

Exemplo 5.22 *Observe as subtrações de polinômios:*

a) Sejam $f(x) = 7x^3 + 3x^2 - 9ix + 2i$ e $g(x) = -x^3 - 2ix^2 + ix - 2i$. Logo:

$$\begin{aligned}&(f-g)(x) = (7-(-1))x^3 + (3-(-2i))x^2 + (-9i - i)x + (2i - (-2i))\\ \Longrightarrow\ &(f-g)(x) = 8x^3 + (3+2i)x^2 - 10ix + 4i.\end{aligned}$$

b) Dados $P(x) = 2x^5 - 8x^3 + x - 4$ e $Q(x) = -8x^3 + 2x^2 - 2x$. Então:

$$\begin{aligned}&(P-Q)(x) = (2-0)x^5 + (-8-(-8))x^3 + (0-2)x^2 + (1-(-2))x + (-4-0)\\ \Longrightarrow\ &(P-Q)(x) = 2x^5 - 2x^2 + 3x - 4.\end{aligned}$$

Teorema 5.3 *Se P e Q são polinômios não nulos tais que $gr(P) = m$, $gr(Q) = n$ e a soma $P+Q$ também seja não nula, então o grau dessa soma é menor ou igual ao maior dos valores m e n, ou seja*

$$gr(P+Q) \le \max\{m, n\}.$$

Exemplo 5.23 *Obtenha o grau do polinômio $P+Q$ em cada caso.*

a) $P(x) = 2x^2 - 1$ e $Q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Então, pelo Teorema 5.3 segue que

$$gr(P+Q) \le \max\{2,3\} \Longrightarrow gr(P+Q) \le 3.$$

Nesse caso, como $P + Q = x^3 + 3x^2 + x$, segue que $gr(P+Q) = 3$.

b) $P(x) = 2x^2 - 2i$ e $Q(x) = -2x^2 + x + 1 \Longrightarrow gr(P+Q) \le \max\{2,2\} \Longrightarrow gr(P+Q) \le 2$.
Como $P + Q = x + (1-2i) \Longrightarrow gr(P+Q) = 1$.

5.6 Multiplicação e divisão de polinômios

Multiplicação

Considere os polinômios

$$P(x) = a_m x^m + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{e} \quad Q(x) = b_n x^n + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0.$$

O produto PQ é o polinômio expresso por

$$(PQ)(x) = a_m b_n x^{m+n} + \ldots + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)\, x^2 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)\, x + a_0 b_0.$$

Observe que esse produto é equivalente a

$$(PQ)(x) = c_{m+n}x^{m+n} + \ldots + c_2x^2 + c_1x + c_0$$

onde cada coeficiente c_k, com $k \in \{1, 2, 3, \ldots, m+n\}$ é obtido por

$$c_k = \sum_{t=0}^{k} a_t b_{k-t} = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \ldots + a_kb_0.$$

A forma como é definida a multiplicação (produto) de polinômios é equivalente a se aplicar a propriedade distributiva e agrupar os termos semelhantes, ou seja, multiplicar cada termo a_tx^t de P por cada termo b_jx^j de Q e efetuar a soma dos resultados obtidos. Vejamos com um exemplo:

Exemplo 5.24 *Multiplicando $A(x) = x^4 - 2x^2 + i$ por $B(x) = 3x^2 - 2x - i$ temos que:*

$$\begin{aligned}
(AB)(x) &= \left(x^4 - 2x^2 + i\right)\left(3x^2 - 2x - i\right) \\
&= x^4\left(3x^2 - 2x - i\right) - 2x^2\left(3x^2 - 2x - i\right) + i\left(3x^2 - 2x - i\right) \\
&= x^4 \cdot 3x^2 + x^4 \cdot (-2x) + x^4 \cdot (-i) - 2x^2 \cdot 3x^2 - 2x^2 \cdot (-2x) - 2x^2 \cdot (-i) \\
&\quad + i \cdot 3x^2 + i \cdot (-2x) + i \cdot (-i) \\
&= 3x^6 - 2x^5 - ix^4 - 6x^4 + 4x^3 + 2ix^2 + 3ix^2 - 2ix - i^2 \\
&= 3x^6 - 2x^5 - (6+i)x^4 + 4x^3 + 5ix^2 - 2ix + 1
\end{aligned}$$

A multiplicação entre polinômios também pode ser feita por meio de dispositivos práticos, que não serão abordados aqui. Dois deles podem ser obtidos em [25].

As Propriedades 5.2 descrevem as principais propriedades que a multiplicação no conjunto K, de polinômios com coeficientes complexos possui, e cujas demonstrações não serão discutidas nesse texto.

Propriedades 5.2

M_1: (Associativa) $f \cdot \left(g \cdot h\right) = \left(f \cdot g\right) \cdot h,\ \forall\ f,\ g,\ h \in K.$

M_2: (Comutativa) $f \cdot g = g \cdot f,\ \forall\ f,\ g \in K.$

M_3: (Elemento neutro) $\exists\ q = 1 \in K$ tal que $f \cdot q = q \cdot f = f,\ \forall\ f \in K$. Sendo assim, o polinômio identidade, $q(x) = 1$, é o elemento neutro da multiplicação de polinômios.

M_4: (Distributiva) $f \cdot \left(g + h\right) = f \cdot g + f \cdot h,\ \forall\ f,\ g,\ h \in K.$

Teorema 5.4 *Se P e Q são polinômios não nulos, então o grau do produto PQ é a soma dos graus de P e Q, ou seja*

$$gr(PQ) = gr(P) + gr(Q).$$

Exemplo 5.25 *Dados $P(x) = 2x^3 - 3i$ e $Q(x) = x^4 - ix$, tem-se pelo Teorema 5.4 que $gr(PQ) = gr(P) + gr(Q) = 3 + 4 \implies gr(PQ) = 7$. Portanto, se a multiplicação de P e Q for realizada, iremos perceber que o polinômio gerado terá grau 7. Isso é percebido facilmente, quando se faz a multiplicação do termo $2x^3$ de P com o termo x^4 de Q.*

Divisão

Definição 5.9 (Divisão de polinômios) *Sejam dois polinômios D e $d \neq 0$. Dividir D por d significa obter dois polinômios Q e R, de forma que sejam verificadas as seguintes condições:*

a) $D = dQ + R$

b) $gr(R) < gr(d)$

Quando $R = 0$ a divisão é denominada exata e se diz que D é divisível por d ou que d é um divisor de D. Os polinômios D, d, Q e R são denominados por dividendo, divisor, quociente e resto, respectivamente.

Exemplo 5.26 *Na divisão de $D = x^4 - 3x^3 + 6x^2$ por $d = x^2 - 3x + 5$, obtém-se como quociente o polinômio $Q = x^2 + 1$ e como resto $R = 3x - 5$. Isso pode ser verificado observando-se que as condições a) e b) da Definição 5.9 são satisfeitas.*

Existem duas situações onde a divisão de D por d se dá de forma direta. Vejamos esses dois casos:

1. **Quando $D = 0$:**

   Nessa situação, considere $Q = R = 0$ e observe que eles satisfazem as condições a) e b) da Definição 5.9, pois:

$$0 = d \cdot 0 + 0 \quad \text{e} \quad R = 0$$

2. **Quando $gr(D) < gr(d)$:**

   Nessa situação, deve-se ter que

$$D = dQ + R \implies gr(D) = gr(dQ+R) \implies gr(dQ+R) < gr(d) \implies Q = 0 \text{ e } D = R \neq 0,$$

   pois satisfazem as condições a) e b) da Definição 5.9.

Exemplo 5.27

a) Dividindo-se $D = 0$ por $d = 2x^3 + 2x$, tem-se que $Q = 0$ e $R = 0$.

b) Dividindo-se $D = 2x^2 + x$ por $d = -4x^4 + x^2$, tem-se $Q = 0$ e $R = D = 2x^2 + x$.

Falta analisar apenas o caso onde $gr(D) \geq gr(d)$. Nesse caso, a divisão não é imediata como as observadas anteriormente, e a forma de obter o quociente Q e o resto R exige a utilização de algum método. Aqui, apresentaremos o método da chave:

Método da chave

Para ilustrar a utilização desse método, vamos aplicá-lo na divisão de $D = 12x^4 + 6x^2 + 1$ por $d = 3x^2 + 2x + 1$, destacando cada parte a ser realizada.

1. Coloca-se D e d numa chave, sendo que, para reduzir a chance de erro na divisão, pode-se completar o polinômio D, colocando coeficientes nulos nos termos faltantes.

$$12x^4 + 0x^3 + 6x^2 + 0x + 1 \ \big|\underline{\ 3x^2 + 2x + 1\ }$$

2. Divide-se o termo de maior grau de D pelo de maior grau de d $(12x^4 : 3x^2 = 4x^2)$, obtendo o primeiro termo do quociente.

$$\begin{array}{r|l} 12x^4+0x^3+6x^2+0x+1 & 3x^2+2x+1 \\ \cline{2-2} & 4x^2 \end{array}$$

3. Multiplica-se o termo obtido para Q por todos os termos de d e subtrai-se o resultado de D. Isso equivale a colocar os resultados das multiplicações abaixo dos respectivos termos de D, e com os sinais trocados, efetuando-se a soma posteriormente.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{12x^4}+0x^3+6x^2+0x+1 & 3x^2+2x+1 \\ \cline{2-2} -\cancel{12x^4}-8x^3-4x^2 \quad\quad\quad & 4x^2 \\ \cline{1-1} -8x^3+2x^2+0x+1 & \end{array}$$

4. O resto parcial, $-8x^3+2x^2+0x+1$, tem grau maior do que o grau de d. Então, divide-se o termo de maior grau desse resto pelo de maior grau de d, obtendo o segundo termo de Q, $-8x^3 : 3x^2 = -\frac{8}{3}x$. Em seguida, repete-se o passo 3.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{12x^4}+0x^3+6x^2+0x+1 & 3x^2+2x+1 \\ \cline{2-2} -\cancel{12x^4}-8x^3-4x^2 \quad\quad\quad & 4x^2-\dfrac{8}{3}x \\ \cline{1-1} -\cancel{8x^3}+2x^2+0x+1 & \\ +\cancel{8x^3}+\dfrac{16}{3}x^2+\dfrac{8}{3}x \quad & \\ \cline{1-1} \dfrac{22}{3}x^2+\dfrac{8}{3}x+1 & \end{array}$$

5. O resto parcial obtido, $\frac{22}{3}x^2+\frac{8}{3}x+1$, tem grau igual ao grau de d. Então, repete-se os passos 4 e 3, obtendo:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{12x^4}+0x^3+6x^2+0x+1 & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2} -\cancel{12x^4}-8x^3-4x^2 \quad\quad\quad & 4x^2-\dfrac{8}{3}x+\dfrac{22}{9} \\ \cline{1-1} -\cancel{8x^3}+2x^2+0x+1 & \\ +\cancel{8x^3}+\dfrac{16}{3}x^2+\dfrac{8}{3}x \quad & \\ \cline{1-1} \cancel{\dfrac{22}{3}x^2}+\dfrac{8}{3}x+1 & \\ -\cancel{\dfrac{22}{3}x^2}-\dfrac{44}{9}x-\dfrac{22}{9} & \\ \cline{1-1} -\dfrac{20}{9}x-\dfrac{13}{9} & \end{array}$$

Portanto, na divisão de D por d, o quociente e o resto são dados respectivamente por

$$Q(x) = 4x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{22}{9} \quad \text{e} \quad R(x) = -\frac{20}{9}x - \frac{13}{9}.$$

Além disso, é claro que deve-se ter que $D = dQ + R$ (Verifique!).

Esse procedimento pode ser utilizado em qualquer divisão de D por d, desde que se tenha $gr(D) \geq gr(d)$.

Observação 5.3 *Observe que o critério de parada da divisão pelo método da chave é quando o grau do resto ficar menor do que o grau do divisor, pois nesse ponto, se garante a condição b) da Definição 5.9.*

Observação 5.4 *Ao se efetuar a divisão, sempre se terá que $gr(R) < gr(d)$. Portanto, o maior grau possível para o resto será sempre $gr(R) = gr(d) - 1$.*

Divisão por binômios de grau 1

Lema 5.1 *Seja $a \in \mathbb{C}$. O resto da divisão de um polinômio $D(x)$ por $x - a$ é igual a $D(a)$.*

Demonstração: Ao se dividir $D(x)$ por $x - a$, deve-se obter $Q(x)$ e $R(x)$ tais que $D(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R(x)$. Contudo, como $gr(R) < gr(x - a)$ e $gr(x - a) = 1$, segue que $gr(R) = 0$, o que implica que $R(x)$ é uma constante, digamos $R(x) = k \in \mathbb{C}\ \forall\ x$. Logo:

$$D(x) = (x - a) \cdot Q(x) + k \Longrightarrow D(a) = (a - a) \cdot Q(x) + k \Longrightarrow D(a) = k = R(x).$$

■

Exemplo 5.28 *O resto da divisão de $D(x) = x^3 - 2x - 6$ por $x - 1$ é dado por $D(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 - 6 \Longrightarrow R(x) = -7$.*

Com o auxílio do Lema 5.1 é possível provar o Teorema 5.5. Essa demonstração será deixada como exercício para o leitor e uma dica pode ser encontrada na seção de respostas.

Teorema 5.5 (D'Alembert) *Seja P um polinômio em $\mathbb{C}$. Então, $P(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, $P(a) = 0$, isto é, quando a for uma raiz de P.*

Exemplo 5.29

a) Sem efetuar a divisão, mostre que o polinômio $A(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$ é divisível por $x - 3$.

   Resolução: Para o binômio $x - 3$ tem-se que $a = 3$. Então, $A(3) = 2 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 = 54 - 108 + 54 \Longrightarrow A(3) = 0$. Logo, pelo Teorema 5.5 segue que A é divisível por $x - 3$.

b) Para que valor de k o polinômio $P(x) = kx^3 + x^2 - 5$ é divisível por $x + \frac{1}{2}$?

   Resolução: No binômio $x + \frac{1}{2}$ tem-se que $a = -\frac{1}{2}$. Então, pelo Teorema 5.5 deve-se ter $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. Logo:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Longleftrightarrow k\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 5 = 0 \Longleftrightarrow -\frac{1}{8}k + \frac{1}{4} - 5 = 0 \Longleftrightarrow k = -38.$$

Um outro resultado relativo à divisão por binômios de grau 1 é sobre a divisão pelo produto de dois desses binômios, conforme descrito no Teorema 5.6.

Teorema 5.6 *Dado um polinômio P que seja divisível por $(x - a)$ e por $(x - b)$, com $a \neq b$, então P é divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$.*

Algoritmo de Briot-Ruffini

O Algoritmo de Briot-Ruffine é uma sequência de passos, utilizada para se obter os coeficientes do quociente e do resto da divisão de um polinômio $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,\ \ a_n \neq 0$, por um binômio da forma $x - a$.

O esquema apresentado na Figura 2 ilustra a execução do algoritmo e as relações de recorrência que devem ser usadas para obter os coeficientes do quociente e também do resto da divisão.

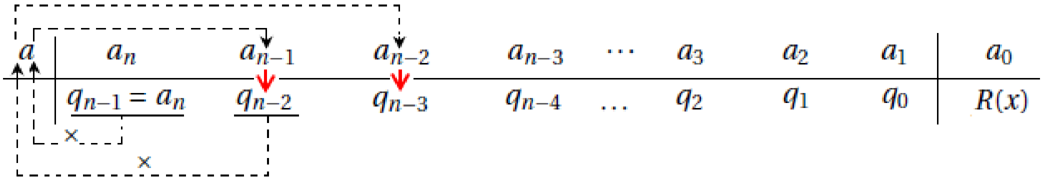


Figura 2 – Ilustração da aplicação do algoritmo de Briot-Ruffine.

Como a divisão é de um polinômio de grau n por um de grau 1, segue que o quociente terá grau $n-1$ e que o resto sempre será uma constante, já que $gr(R) = 0$. O algoritmo fornece as seguintes relações de recorrência que permitem obter os coeficientes do quociente e do resto da divisão:

- $q_{n-1} = a_n$
- $q_{n-2} = q_{n-1} \cdot a + a_{n-1}$
- $q_{n-3} = q_{n-2} \cdot a + a_{n-2}$
- $q_{n-4} = q_{n-3} \cdot a + a_{n-3}$

  $\vdots$
- $q_2 = q_3 \cdot a + a_3$
- $q_1 = q_2 \cdot a + a_2$
- $q_0 = q_1 \cdot a + a_1$
- $R(x) = q_0 \cdot a + a_0$

Sendo que, $q_{n-1},\ q_{n-2},\ \ldots,\ q_0$ são os coeficientes do quociente e $R(x)$ é o resto da divisão de $P(x)$ por $x - a$.

Exemplo 5.30 *Vamos obter o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ na divisão de $P(x) = 4x^3 + 6x^2 + 8x + 10$ por $x - 2$, utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini.*

Como $gr(P) = 3$ e $gr(x-2) = 1$, segue que $gr(Q) = 2$. Utilizando o dispositivo da Figura 2 e as relações de recorrência para $q_2,\ q_1,\ q_0$ e $R(x)$, vem que:

2	4	6	8	10
	4	14	36	82

Portanto, tem-se que

$$Q(x) = 4x^2 + 14x + 36 \quad \text{e} \quad R(x) = 82.$$

5.7 Teorema Fundamental da Álgebra - TFA

Um teorema de extrema importância em nosso estudo é o denominado Teorema Fundamental da Álgebra, ou simplesmente, TFA. Sua demonstração está além do escopo desse livro, pois requer conhecimentos mais avançados de matemática.

Teorema 5.7 (TFA) *Todo polinômio de grau n em $\mathbb{C}$ admite exatamente n raízes complexas, que podem, inclusive, ser repetidas.*

Já o Teorema 5.8, que é uma consequência do TFA, apresenta uma forma de escrever um polinômio a partir das suas raízes. Vejamos:

Teorema 5.8 (Teorema da Fatoração) *Todo polinômio*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$$

com $a_n \neq 0$ e com raízes $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n$, pode ser decomposto (ou fatorado), de forma única, em n fatores de grau 1, como segue:

$$P(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_n). \tag{5.1}$$

Sendo assim, dizemos que um polinômio está fatorado quando ele estiver escrito na forma apresentada pela Equação (5.1).

Exemplo 5.31 *As raízes de $-3x^2-3x+18=0$ são $x_1=-3$ e $x_2=2$. Além disso, como $a_2=-3$, segue do Teorema 5.8 que a forma fatorada desse polinômio é*

$$-3x^2-3x+18 = -3(x+3)(x-2).$$

Exemplo 5.32 *Considere o polinômio $-x^3+4x^2+7x-10$. Observe que $x=1$ é uma raiz desse polinômio, pois $P(1)=0$. Logo, pelo Teorema 5.5 segue que ele é divisível por $x-1$. Efetuando-se essa divisão (pelo algoritmo de Briot-Ruffini ou pelo método da chave) obtem-se que*

$$-x^3+4x^2+7x-10 = (x-1)(-x^2+3x+10).$$

As raízes de $-x^2+3x+10$ são $x_1=-2$ e $x_2=5$, o que nos leva a

$$-x^3+4x^2+7x-10 = -(x-1)(x+2)(x-5),$$

que é a forma fatorada desse polinômio de grau 3.

Considere então, as n raízes complexas de um polinômio de grau n, sendo que o número de raízes distintas é t, com $0<t<n$, e onde r_1 se repete m_1 vezes, r_2 se repete m_2 vezes, r_3 se repete m_3 vezes, até a raiz r_t que se repete m_t vezes, com $m_1,\ \ldots,\ m_t \in \mathbb{N}$. Então $P(x)$ pode ser escrito da forma:

$$P(x) = a_n(x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_2}(x-r_3)^{m_3}\ldots(x-r_t)^{m_t},$$

onde $m_1+m_2+m_3+\ldots+m_t = n$.

Exemplo 5.33 *O polinômio de grau 8 dado por* $4(x^2-6x+9)(x^2-2ix-1)(x+5)^4$ *tem como raízes* $x_1 = x_2 = 3,\ x_3 = x_4 = i$ e $x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = -5$. *Logo,*

$$4(x^2-6x+9)(x^2-2ix-1)(x+5)^4 = 4(x-3)^2(x-i)^2(x+5)^4.$$

Definição 5.10 *Quando* $P(x)$ *é escrito da forma*

$$P(x) = a_n(x-r_1)^{m_1}(x-r_2)^{m_2}(x-r_3)^{m_3}\dots(x-r_t)^{m_t},$$

diz-se que as raízes $r_1,\ r_2,\ \dots,\ r_t$ *possuem multiplicidades* $m_1,\ m_2,\ \dots,\ m_t$*, respectivamente. Ou seja, a multiplicidade de uma raiz é o número de vezes que essa raiz se repete. Além disso, se a raiz aparecer apenas uma vez ela é denominada raiz simples.*

Exemplo 5.34 *No Exemplo 5.33 tem-se que as raízes 3 e i possuem multiplicidade 2 e que a raiz -5 tem multiplicidade 4.*

5.8 Relações de Girard

As relações de Girard são relações existentes entre os coeficientes e as raízes de uma equação polinomial do tipo $P(x) = 0$. Vamos apresentar aqui as relações referentes às equações polinomiais do segundo e do terceiro grau. Detalhes relativos às equações de grau n para $n > 3$ podem ser obtidas em [25].

Pelo Teorema 5.8 tem-se que $ax^2 + bx + c = 0$, de raízes x_1 e x_2, pode ser escrita como

$$a(x-x_1)(x-x_2) = 0.$$

Tem-se, então, que

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Como $a \neq 0$, ao se dividir ambos os lados da última equação por a, obtém-se

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2,$$

o que leva a

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}. \tag{5.2}$$

As igualdades apresentadas nas Equações (5.2) são as relações de Girard para a equação do 2º grau.

Considerando S e P como a soma e o produto das raízes, respectivamente, tem-se que a equação pode ser escrita da forma

$$x^2 - Sx + P = 0 \tag{5.3}$$

que é uma forma de se encontrar as raízes de maneira simples, ou então, de construir uma equação a partir das suas raízes.

Exemplo 5.35

a) Observando a equação $x^2-3x-10 = 0$ deve-se ter $S = x_1 + x_2 = 3$ e $P = x_1x_2 = -10$. Apenas com cálculos mentais, observa-se que os dois números que satisfazem essas condições são 5 e -2, o que implica que se pode considerar que $x_1 = 5$ e $x_2 = -2$.

b) Para se obter uma equação quadrática que tenha como raízes os valores $x_1 = -1$ e $x_2 = 7$, basta observarmos que $x_1 + x_2 = 6$ e que $x_1 x_2 = -7$. Logo, pela Equação (5.3) vem que uma equação com essas raízes é $x^2 - 6x - 7 = 0$.

Com o mesmo raciocínio usado anteriormente, é possível provar que as relações de Girard para equações da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e de raízes x_1, x_2 e x_3, são:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \qquad \text{e} \qquad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \frac{c}{a}. \tag{5.4}$$

5.9 Exercícios

1. Qual é o grau do monômio $P(x, y, z) = 12x^3y^4z^2$?

2. Obtenha o $gr(P)$ para cada caso:

   a) $P = -3x^2y^5$ b) $P = 14$ c) $P = -7iy$ d) $P = 0x^7$

3. Para os monômios $A = -x^2y^3$, $B = 4x^2y^3$, $C = \frac{2}{3}ab$ e $D = -ab$, obtenha:

   a) $A + B$ b) $A - B$ c) $B - A$ d) $A \cdot B$ e) $-C + 4D$ f) $-6C \cdot D$

4. Efetue o que se pede:

   a) $\dfrac{14x^2y^5}{49xy^3}$ b) $2^{-1}a^4b^3c^9 : 4^{-2}a^3bc^7$ c) $\left(3x^2y^3z^4\right)^2$ d) $\left(\dfrac{3}{4}a^3b^2cd^3\right)^3$

5. Prove a propriedade do *cubo da soma e da diferença de dois termos*, ou seja, que dados $x, y \in \mathbb{C}$ então:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \quad \text{e} \quad (x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3.$$

6. Efetue as seguintes operações:

   a) $(x - 1) + 6(x + 1) - 5$
   b) $2(x + 10) - (x^2 - 1)$
   c) $4(x^2 - 5x + 6) - 3(x^2 + 10x + 2)$
   d) $(1 - 4x)(x^2 - x - 2)$
   e) $(x^2 + x - 3)(x - 2)$
   f) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

7. Utilizando produtos notáveis resolva cada expressão:

   a) $\left(a\sqrt{a} + 2b\right)^2$, com $a \geq 0$
   b) $\left(2\sqrt{b} + a\right)^2$, com $b \geq 0$
   c) $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^2$
   d) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)^2$
   e) $\left(\dfrac{1}{x} + x\right)^2$
   f) $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y}\right)$
   g) $\left(4x - 3y\right)^3$
   h) $(2 + x)^3$

8. Se $A = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ e $B = x^{-1} - y^{-1}$, o valor de $B^2 - A^2$ é:

   a) 0 b) $\frac{x+y}{x-y}$ c) $\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$ d) $\frac{-4}{xy}$ e) $-4x^2y^2$

9. Sabendo que $a + \dfrac{1}{a} = 3$, qual o valor de $a^2 + \dfrac{1}{a^2}$?

   a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

10. Encontre a expressão expandida de $(a+b+c)^2$.

11. (Escola Técnica Federal - RJ) Qual a expressão que deve ser somada a $x^2 - 6x + 5$ para que resulte o quadrado de $(x-3)$?

    a) $3x$ b) $4x$ c) 3 d) 4 e) $3x + 4x$

12. Dados os polinômios $f(x) = 7 - 2x + 4x^2$, $g(x) = 5x^3 + x^2 + x + 5$ e $h(x) = x^4 - 3x + 2$ calcular:

    a) $(f+g)(x)$ b) $(g-h)(x)$ c) $(h-f)(x)$

13. Determinar $h(x)$ tal que $h(x) = (x+1)(x-2) + (x-2)(x-1) + 4(x+1)$.

14. Se f e g são dois polinômios de grau n, qual é o grau de $(f+g)$ e de fg?

15. Seja $f(x)$ uma função polinomial do segundo grau. Determinar $f(x)$ sabendo que $f(1) = 0$ e $f(x) = f(x-1)$.

16. Sejam f, g e h polinômios de graus 2, 3 e 4 respectivamente. O grau do polinômio $f \cdot (g-h)$ é:

    a) 4 b) 5 c) 6 d) 8 e) 14

17. Numa divisão de polinômios em que o divisor tem grau 4, o quociente tem grau 2 e o resto tem grau 1, qual é o grau do dividendo? E se o grau do resto fosse 2?

18. Sejam f e h são polinômios de graus 4 e 5 respectivamente, então o grau de:

    a) $f + h$ é 4 b) fh é 20 c) $f + h$ é 9 d) fh é 9 e) $h - f$ é 4

19. (UFRGS) Se $p(x)$ é um polinômio de grau 5, então $\left[p(x)\right]^3 + \left[p(x)\right]^2 + 2p(x)$ possui grau igual a:

    a) 3 b) 8 c) 15 d) 20 e) 30

20. (PUC) O polinômio $p(x) = (x-1) \cdot (x-2)^2 \cdot (x-3)^3 \cdot \ldots \cdot (x-10)^{10}$ tem grau:

    a) 10 b) 10! c) 10^2 d) 110 e) 110/2

21. Dividir f por g aplicando o método da chave:

    a) $f = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + 4x - 3$ e $g = x^3 - 2x + 1$
    b) $f = x^4 - 2x + 13$ e $g = x^2 + x + 1$

22. (ITA) Determinar o resto de $x^2 + x + 1$ dividido por $x + 1$.

23. (UFMG - 2005) Sejam $p(x) = 4x^3 + bx^2 + cx + d$ e $q(x) = mx^2 + nx - 3$ polinômios com coeficientes reais. Sabe-se que $p(x) = (2x-6)q(x) + x - 10$.

    Considerando-se essas informações, é **INCORRETO** afirmar que:

    a) se 10 é raiz de $q(x)$, então 10 também é raiz de $p(x)$.
    b) $p(3) = -7$
    c) $d = 18$
    d) $m = 2$

24. Sem efetuar a divisão, prove que $f(x) = x^4 + 3x^3 - 6x - 4$ é divisível por $g(x) = x^2 + 3x + 2$.

25. Aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, determinar quociente e resto da divisão de f por g:

    a) $f = 5x^4 - 12x^3 + x^2 - 13$ e $g = x + 3$
    b) $f = 81x^5 + 32$ e $g = x - \frac{2}{3}$

26. Sendo $P(x) = Q(x) + x^2 + x + 1$ e sabendo que 2 é raiz de $P(x)$ e que 1 é raiz de $Q(x)$, então $P(1) - Q(2)$ vale:

    a) 0 b) 2 c) 3 d) 6 e) 10

27. (Vunesp-SP) Dada a equação $x^2 + x - \sqrt{2} = 0$, calcule a soma dos inversos de suas raízes.

28. (OBMEP - 2007, Nível 3 da Lista 8) ***As duas partículas*** **-** Duas partículas, A e B, percorrem uma circunferência de 120 m de comprimento. A partícula A gasta 3 segundos menos que B, por estar animada com uma velocidade maior de 2 metros por segundo. Qual é a velocidade de cada partícula?

29. (OBMEP - 2008, Nível 2 da Lista 4) ***Soma de cubos*** **-** Se $x + y = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$, calcule $x^3 + y^3$.

30. (UFMA) Sabendo-se que $P(x)$ é um polinômio de terceiro grau, que é divisível por $x - 3$, e que $P(x) = P(x-3) - x^2 - 3$, determine o produto das raízes de $P(x)$.

31. Obtenha um polinômio de grau 4 que tenha como raízes os números complexos: i, $-i$, $3i$ e 2.

32. (UFMG) Sejam $p(x) = ax^2 + (a-15)x + 1$ e $q(x) = 2x^2 - 3x + \frac{1}{b}$ polinômios com coeficientes reais.

    Sabe-se que esses polinômios possuem as mesmas raízes. Então, é **CORRETO** afirmar que o valor de $a + b$ é

    a) 3 b) 6 c) 9 d) 12

33. Determine um polinômio que possua, ao menos, as raízes $x_1 = 2$ (raiz simples), $x_2 = -3$, $x_3 = 2i$ e $x_4 = -2i$, sendo que x_2, x_3 e x_4 são de multiplicidade 2.

    a) Qual é o menor grau possível para esse polinômio?
    b) Esse polinômio pode ter grau maior do que 10?

34. Resolva a equação $2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ sabendo que ela admite uma raiz de multiplicidade 2.

35. Determine os reais a, b, c de modo que $f(x) = (a-2)x^3 + (b+2)x + (3-c)$ seja o polinômio nulo.

36. (UFMG - 2003) Sabendo-se que $p(1+2i) = 0$, **CALCULE** todas as raízes do polinômio $p(x) = x^5 + x^4 + 13x^2 + 5x$.

37. Dadas as funções polinomiais $A(x) = (a-1)x^2 + bx + c$ e $B(x) = 2ax^2 + 2bx + c$, quais são as condições para que se obtenha a identidade $A(x) = B(x)$?

38. Dada a função polinomial $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, determine:

    a) $f(0)$ b) $f(-1)$ c) $f(1)$ d) $f(x+1)$ e) $f(f(-1))$

39. (UFMG - 2006 - Modificada) Considere o polinômio $p(x) = x^4 - 2mx^2 + 2m - 1$, sendo m um número real > 1. CALCULE as raízes de $p(x)$ em função de m.

40. (UFPA) O polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ é idêntico a $Q(x) = 5x^2 - 3x + 4$. Então, temos que $a + b + c + d$ é igual a:

    a) 6 b) 5 c) 4 d) 0 e) -3

41. Qual é o quociente da divisão de $P(x) = 4x^4 - 4x^3 + x - 1$ por $Q(x) = 4x^3 + 1$?

    a) $x - 5$ b) $x - 1$ c) $x + 5$ d) $4x - 5$ e) $4x + 8$

42. Considere os polinômios $A(x) = x^2 + ax + b$ e $B(x) = x^4 + 1$. Determine $a, b \in \mathbb{R}$ para os quais se garanta que B é divisível por A.

43. Sabe-se que na divisão de um polinômio A por $(x - 5)$ o resto obtido é 8 e que na divisão desse mesmo polinômio por $(x - 3)$ o resto é 6. Qual é o resto da divisão de A por $(x - 5)(x - 3)$?

44. (UFMG) O quociente do polinômio $P(x) = x^4 + a^2x^2 + a^4$ pelo polinômio $q(x) = x^2 - ax + a^2$, $a \in \mathbb{R}$, é:

    a) $x^2 - ax + a$ b) $x^2 - ax + a^2$ c) $x^2 - a^2x + a$ d) $x^2 + ax + a^2$

45. (UFMG) Os valores de m e n, para os quais o resto da divisão de $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + mx + n$ por $q(x) = x^2 - 3x + 2$, seja $2x + 1$, são respectivamente:

    a) 9 e -1 b) -3 e 7 c) 2 e 3 d) 2 e 1 e) -6 e 2

46. Obtenha o valor numérico de $P(x) = 2x^4 + 2ix^3 + x + i$ para $x = i$ e $x = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}}$.

47. Determinar as raízes, em $\mathbb{C}$, e suas respectivas multiplicidades, considerando $3(x + 4)(x^2 + 1) = 0$.

48. Qual é o grau de um polinomio $P(x)$ cujas raízes são 3, 2, -1 com multiplicidades 7, 6 e 10, respectivamente?

49. Escreva os polinômios abaixo nas suas respectivas formas fatoradas, considerando $U = \mathbb{C}$:

    a) $P(x) = 2x^2 - 8x + 6$ b) $Q(x) = 2x^2 - 18$
    c) $R(x) = x^2 + 16$ d) $S(x) = (x - 2)(x^2 - 3x + 2)$
    e) $T(x) = 9x^2 - 1$ f) $U(x) = 4x^4 + 2x^3 - x^2$

50. Sabendo que $x = 1/3$ é raiz de $p(x) = 9x^3 - 9x^2 - x + 1$, obtenha a sua forma fatorada.

51. (UECE) Se p e q são as raízes da equação $2x^2 - 6x + 7 = 0$, então $(p + 3)(q + 3)$ é igual a:

    a) $\frac{41}{2}$ b) $\frac{43}{2}$ c) $\frac{45}{2}$ d) $\frac{47}{2}$

52. O polinômio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tem todos os seus coeficientes reais. Sabendo que i é uma de suas raízes e que 1 é uma raiz dupla, determine os valores de a, b, c e d.

53. Usando o Teorema 5.8 (Teorema da fatoração), determine o polinômio $k(x)$ com $gr(k) = 3$ e cujas raízes são 1, 2 e 3, sabendo que o valor numérico de k para $x = 1/2$ é $-15/8$.

54. Sabe-se que o coeficiente a_3 do polinômio $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ é igual a 1. Além disso, 1 e 2 são raízes de q e $q(3) = 30$. Determine $q(-1)$.

55. Apresente dois polinômios, f e g não nulos, tais que que $gr(f+g) = 0$.

56. Considere os polinômios $A(x) = 2x^2 - 1$ e $B(x) = x^3 + x^2 + x + 1$:

    a) Mostre que $A(x) - B(x) \neq B(x) - A(x)$.

    b) Porque essa diferença não fere a comutatividade da soma de polinômios?

57. Utilizando o Exemplo 5.23 como referência, discuta em que casos ter-se-á que $gr(f+g) < max\{m,n\}$ e $gr(f+g) = max\{m,n\}$.

58. Sejam A e B polinômios quaisquer, com $AB \neq 0$. É correto afirmar que:

    a) $gr(A+B) = gr(A) + gr(B)$

    b) $gr(AB) = gr(A) + gr(B)$

    c) $gr(AB) > gr(A)$

    Apresente contra exemplos para as afirmações falsas.

59. Obtenha o polinômio do segundo grau $f(x)$ tq $f(0) = 2$, $f(-1) = 0$ e $f(1) = 8$.

60. Usando o Lema 5.1 demonstre o Teorema 5.5 (teorema de D'Alembert).

CAPÍTULO 6

Tópicos de Cálculo Algébrico

Nesse capítulo, apresentaremos algumas definições e exemplos relativos às expressões algébricas, expressões algébricas inteiras e fracionárias, racionalização de denominadores e operações com frações algébricas. Ressaltamos ainda, que em todo esse capítulo o universo de trabalho será o conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$.

6.1 Expressões algébricas e fracionárias

Expressões algébricas

Definição 6.1 *Denomina-se por **expressão algébrica** toda expressão matemática cujos termos são constituídos de variáveis (letras) e números (constantes).*

Exemplo 6.1 *Sendo a, b constantes complexas, todas as expressões abaixo são algébricas:*

a) $-3ix^2 + 5ax + 2y$

b) $-\frac{3}{7}xy^{1/2} + 3bz^2 - 2yz$

c) $bx + 1$

Classificação

As expressões algébricas são classificadas em:

- **Irracionais**: Quando as variáveis estão sujeitas à operação de radiciação. É o caso do item b do Exemplo 6.1.

- **Racionais**: Quando as variáveis **não** estão sujeitas à operação de radiciação. É o caso dos itens a e c do Exemplo 6.1. Observe que uma expressão algébrica só será racional quando os expoentes das variáveis forem números inteiros.

Como as expressões algébricas estão associadas às variáveis, é comum usar uma outra letra, acompanhada das variáveis envolvidas, entre parênteses, para representar cada expressão[i], assim como é feito para polinômios. As expressões apresentadas no Exemplo 6.1 podem ser representadas por:

$$P(x,y) = -3ix^2 + 5ax + 2y, \qquad Q(x,y,z) = -\frac{3}{7}xy^{1/2} + 3bz^2 - 2yz \quad \text{e} \quad R(x) = bx + 1.$$

Valor numérico

Ao se substituir as variáveis de uma expressão algébrica por números específicos, onde essa expressão esteja definida, e se efetuar as operações indicadas, o valor obtido é denominado valor numérico da expressão para aqueles valores.

Exemplo 6.2

a) O valor numérico da expressão algébrica $A(x,y) = -3ix^2 + 5x + 2y$ para $x = i$ e $y = -2$ é dado por

$$A(i,-2) = -3i \cdot i^2 + 5 \cdot i + 2 \cdot (-2) = -3i \cdot (-1) + 5i - 4$$
$$\Longrightarrow A(i,-2) = 8i - 4.$$

b) Sendo $B(x,y,z) = -\frac{3}{7}xy + 3z^2 - 2yz^{2/3}$, segue que

$$B(7,-2,i) = -\frac{3}{7} \cdot 7 \cdot (-2) + 3 \cdot i^2 - 2 \cdot (-2) \cdot \sqrt[3]{i^2} = 6 - 3 + 4\sqrt[3]{-1}$$
$$\Longrightarrow B(7,-2,i) = -1.$$

c) Se o valor numérico da expressão $-7x + 3$ é 12, qual deve ser o valor da variável x?

Resolução: Ora, como o valor numérico é 12, pode-se escrever que

$$-7x + 3 = 12 \Longrightarrow 7x = 3 - 12 \Longrightarrow x = -\frac{9}{7}.$$

Expressões fracionárias

Definição 6.2 *Diremos que uma* ***expressão algébrica racional*** *é uma* ***expressão fracionária*** *quando ela possuir pelo menos uma variável no denominador. Caso contrário, ela será chamada de* ***expressão inteira****.*

Exemplo 6.3 *Em* a), b), c) *e* d) *temos expressões algébricas fracionárias e em* e) *e* f) *expressões inteiras.*

a) $\frac{2xy+2iy}{3zy}$ b) $\frac{2xa^2}{z}$ c) $\frac{3iwz^3}{xy+a}$ d) $\frac{3a^2+4b^3-xy}{wa+3b}$ e) $\frac{2a^2b}{5}$ e f) $-\frac{3z}{2}$.

Observação 6.1 *Atente para o fato de que, nas expressões fracionárias, como o denominador sempre terá pelo menos uma variável, os valores que anularem o denominador estarão fora do domínio dessa expressão, que é o conjunto de todos os valores que as variáveis podem assumir. Por exemplo, no item a) do Exemplo 6.3 deve-se ter que $z \neq 0$ e $y \neq 0$ e no item b) deve-se ter que $z \neq 0$.*

[i] Quando não gerar ambiquidades, também é comum utilizar as letras, sem as variáveis. Ou seja, para o exemplo apresentado, usaria-se $P = P(x,y)$, $Q = Q(x,y,z)$ e $R = R(x)$

6.2 Fatoração de expressões algébricas inteiras

Fatorar uma expressão algébrica inteira consiste em escrevê-la como um produto de duas ou mais expressões algébricas. Nessa seção, vamos nos dedicar a estudar os seguintes tipos de fatoração:

- ➛ Fator comum.
- ➛ Fatoração por agrupamento.
- ➛ Trinômio quadrado perfeito e diferença de quadrados.
- ➛ Soma e diferença de cubos.

Fator comum

Quando um ou mais fatores foram comuns a todos os termos de uma expressão inteira, podemos colocá-lo em evidência, isto é, como um fator multiplicativo, sendo que o outro fator será o resultado da divisão de cada termo da expressão por esse fator. Vejamos um exemplo:

Exemplo 6.4 *Fatore as expressões* $ax+ay+az,\ \ bx+b^2xy,\ \ 9x^2-6x,\ \ t^3k+tk^3$ *e* $2z^3+2iz^2+12z$*, considerando* $a,\ b,\ x,\ t$ *e* k *como constantes não nulas.*

a) Observe que a é o único fator comum em todos os três termos da expressão $ax+ay+az$. Sendo assim, é ele que podemos colocar em evidência. Portanto, devemos ter

$$ax+ay+az=a\left(x+y+z\right).$$

Para se obter cada um dos três termos do fator entre parênteses, bastou dividir cada termo da expressão pelo fator a, ou seja, $ax/a=x$, $\ ay/a=y$ e $az/a=z$.

b) Na segunda expressão, o fator comum entre os dois termos é bx. Logo, como $bx/bx=1$ e $b^2xy/bx=by$, tem-se que

$$bx+b^2xy=bx\left(1+by\right).$$

c) Na expressão $9x^2-6x$ percebe-se que o fator comum é $3x$. Então, tem-se que

$$9x^2-6x=3x\,(3x-2)\,.$$

d) Em t^3k+tk^3 o fator comum é tk. Logo

$$t^3k+tk^3=tk\left(t^2+k^2\right).$$

e) Percebe-se que o fator comum nos termos de $2z^3+2iz^2+12z$ é $2z$. Logo

$$2z^3+2iz^2+12z=2z\left(z^2+iz+6\right)=2z\,(z-2i)\,(z+3i)\,.$$

Fatoração por agrupamento

É um método utilizado quando nem todos os termos da expressão possuem um fator comum, mas grupos de termos possuem um determinado fator comum. Vejamos:

Exemplo 6.5 *Fatore as expressões* $6x+6z+x^2+xz$ *e* $4y^2-8y-zy+2z$.

a) Observe que 6 é um fator comum de dois termos da expressão $6x+6z+x^2+xz$ e que x é fator comum dos outros dois. Então, pode-se colocar 6 em evidência nesses dois termos e x em evidência nos outros dois, obtendo

$$6x+6z+x^2+xz=6(x+z)+x(x+z)$$

Ao se fazer isso, a expressão que possuia quatro termos, passou a possuir apenas dois. Além disso, observe que $(x+z)$ é um fator comum nesses dois termos, e por isso, pode-se colocá-lo em evidência, gerando

$$6x+6z+x^2+xz=6(x+z)+x(x+z)=(x+z)(6+x).$$

Portanto, temos que

$$6x+6z+x^2+xz=(x+z)(6+x).$$

b) Com raciocínio análogo ao que foi feito no item a) tem-se que

$$4y^2-8y-zy+2z=4y(y-2)-z(y-2)=(y-2)(4y-z).$$

Trinômio quadrado perfeito

Quando um trinômio pode ser escrito como o quadrado da soma (ou da diferença) de dois termos, dizemos que ele é um **trinômio quadrado perfeito**.

Como o trinômio será escrito como um produto notável, uma forma de verificar se ele é um quadrado perfeito é a execução de três passos (considerando que as variáveis são não negativas):

1. Tira-se a raiz quadrada dos termos do trinômio que possam ser escritos como um fator elevado ao quadrado (geralmente o 1º e o 3º membros).
2. Multiplica-se os resultados obtidos no item 1, e em seguida, multiplica-se o resultado obtido por 2 ou -2, conforme necessário.
3. Se o resultado do item 2 for igual ao termo ainda não utilizado (geralmente o 2º termo), este trinômio será um quadrado perfeito. Caso contrário, não será.

Exemplo 6.6 *Fatore os trinômios* $9x^2+24xy+16y^2$ *e* $t^4-2t^3+t^2$.

a) Para o trinômio $9x^2+24xy+16y^2$, deve-se extrair a raiz quadrada de $9x^2$ e $16y^2$:

$$\sqrt{9x^2}=3x \text{ e } \sqrt{16y^2}=4y.$$

Além disso, pelo item 2, observe que

$$2\cdot 3x\cdot 4y=24xy,$$

que corresponde ao segundo termo do trinômio (item 3). Portanto, esse trinômio é um quadrado perfeito e pode ser fatorado da forma

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 = \left(3x + 4y\right)^2.$$

b) No trinômio $t^4 - 2t^3 + t^2$ observe que

$$\sqrt{t^4} = t^2 \text{ e } \sqrt{t^2} = t.$$

Além disso,

$$-2 \cdot t^2 \cdot t = -2t^3,$$

que é exatamente o 2º termo do trinômio, o que confirma que ele é um trinômio quadrado perfeito, correspondente ao quadrado da diferença de dois termos. Portanto, temos que

$$t^4 - 2t^3 + t^2 = \left(t^2 - t\right)^2.$$

c) O trinômio $m^2 - mn + n^2$ não é um quadrado perfeito pois:

$$\sqrt{m^2} = m, \quad \sqrt{n^2} = n, \quad \text{mas} \quad 2mn \neq -mn \quad \text{e} \quad -2mn \neq -mn.$$

Diferença de quadrados

Esse caso corresponde ao processo inverso do produto da soma pela diferença de dois termos, quando se quer fatorar a diferença de dois quadrados. Para isso, basta extrairmos a raiz quadrada dos dois termos. A fatoração será o produto da soma pela diferença desses resultados. Vejamos os exemplos:

Exemplo 6.7 *Fatore o binômio* $25x^2 - 144y^2$.

Resolução: Observe que $\sqrt{25x^2} = 5x$ e que $\sqrt{144y^2} = 12y$, considerando $x,\ y > 0$. Logo

$$25x^2 - 144y^2 = \left(5x + 12y\right)\left(5x - 12y\right).$$

Soma e diferença de cubos

Verifica-se facilmente que a soma de dois cubos, $x^3 + y^3$, é igual ao produto do fator $(x + y)$ pelo fator $(x^2 - xy + y^2)$, isto é:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

Também se verifica que a diferença de dois cubos, $x^3 - y^3$, é igual ao produto do fator $(x - y)$ pelo fator $(x^2 + xy + y^2)$, isto é:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Esses dois resultados representam a fatoração de binômios escritos como soma ou diferença de cubos. Vejamos:

Exemplo 6.8 *Fatore as expressões* y^3+125 *e* $27x^3-1$.

a) Observe que $y^3+125=y^3+5^3 \Longrightarrow y^3+125=(y+5)(y^2-5y+25)$.

b) A expressão $27x^3-1$ pode ser reescrita na forma

$$27x^3-1=(3x)^3-1^3=(3x-1)(9x^2+3x+1)=(3x-1)(3x+1)^2.$$

6.3 Frações algébricas e simplificação

Definição 6.3 *Frações algébricas são as frações onde numerador e denominador são expressões algébricas.*

Exemplo 6.9

a) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$, b) $\dfrac{-y^2+x^2}{zy^2-zx^2}$ e c) $\dfrac{y^3+27z^3}{2xy+6xz}$.

Simplificação de frações algébricas

Para se efetuar a simplificação de frações algébricas, basta fatorar o numerador e o denominador, e, em seguida, cancelar (ou simplificar) os fatores comuns. É importante, também, indicar as condições de existência da fração, caso seja necessário.

Exemplo 6.10 *Vamos simplificar as três frações algébricas apresentadas no Exemplo 6.9.*

a) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}=\dfrac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}$, cujas condições de existência são

$$x+y\neq 0 \text{ e } x-y\neq 0.$$

Logo, deve-se ter, nesse caso, que $x\neq -y$ e $x\neq y$. Voltemos, agora, à simplificação:

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}=\frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{x+y}{x-y}.$$

b) $\dfrac{-y^2+x^2}{zy^2-zx^2}=\dfrac{-(y^2-x^2)}{z(y^2-x^2)}=-\dfrac{1}{z}$.

Observe que a fração algébrica original tem como condições de existência

$$z\neq 0 \text{ e } y^2-x^2=(y+x)(y-x)\neq 0,$$

ou seja, deve-se ter que $z\neq 0$, $y\neq -x$ e $y\neq x$.

c) $\dfrac{y^3+27z^3}{2xy+6xz}=\dfrac{y^3+(3z)^3}{2x(y+3z)}=\dfrac{(y+3z)(y^2-3yz+9z^2)}{2x(y+3z)}=\dfrac{y^2-3yz+9z^2}{2x}$.

Observe que para a fração algébrica original estar bem definida, é necessário que

$$2x\neq 0 \text{ e } y+3z\neq 0 \Longrightarrow x\neq 0 \text{ e } y\neq -3z.$$

6.4 Mínimo múltiplo comum

Considere duas ou mais expressões algébricas. O mínimo comum entre elas (mmc) será a expressão algébrica de menor grau e que seja divisível simultaneamente por todas as expressões dadas. Sendo assim, é possível obter o mmc da seguinte forma:

i. Fatora-se cada expressão dada.

ii. Forma-se o produto dos fatores comuns e não comuns a todas as expressões, tomados com seus maiores expoentes.

Exemplo 6.11 *O mmc entre* $14x+7y$ *e* $6x+3y$ *é obtido da seguinte forma:*

$$14x+7y = 7(2x+y) \quad \text{e} \quad 6x+3y = 3(2x+y).$$

Observe que os fatores comuns e não comuns são: 7, 3 e $2x+y$. *Portanto, o* mmc *procurado é:*

$$7\cdot 3\cdot (2x+y) = 21(2x+y).$$

Exemplo 6.12 *Considere as expressões algébricas* $P(x) = 25x^2+10x+1$, $Q(x) = 1-25x^2$ *e* $R(x) = 1+5x$.

Temos que:

$$P(x) = 25x^2+10x+1 = (5x)^2+2\cdot(5x)\cdot 1+1^2 = (1+5x)^2$$
$$Q(x) = 1-25x^2 = 1^2-(5x)^2 = (1+5x)(1-5x)$$
$$R(x) = 1+5x$$

Então, os fatores que irão compor o $mmc(P,Q,R)$ *são:* $(1+5x)^2$ *e* $1-5x$, *e ele será*

$$mmc(P,Q,R) = (1-5x)(1+5x)^2.$$

O mmc de expressões algébricas é muito importante para se efetuar as operações entre as frações algébricas. A próxima seção deixará isso mais claro.

6.5 Operações com frações algébricas

Para se efetuar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações algébricas, procedemos da mesma forma como nas frações numéricas.

Adição e Subtração

Se os denominadores forem diferentes, deve-se reduzí-las ao mesmo denominador, efetuar as operações indicadas e, se possível, simplificar a fração algébrica resultante. Uma forma de reduzir as frações algébricas ao mesmo denominador é determinando o mmc entre eles. Vejamos um exemplo:

Exemplo 6.13 *Efetue o que se pede:*

a) $\dfrac{y-1}{y+1}+\dfrac{3y}{y^2-1}$ *b)* $\dfrac{a-b}{4a^2-4b^2}-\dfrac{a+b}{3a^2+6ab+3b^2}$

Resolução:

a) Temos que $y+1$ não é fatorável e que $y^2-1=y^2-1^2=(y+1)(y-1)$. Logo, o mmc é dado por $(y+1)(y-1)$. Então:

$$\frac{y-1}{y+1}+\frac{3y}{y^2-1}=\frac{(y-1)^2+3y}{(y+1)(y-1)}=\frac{y^2+y+1}{y^2-1}.$$

b) Temos que

$$4a^2-4b^2=4(a^2-b^2)=4(a+b)(a-b)$$

e que

$$3a^2+6ab+3b^2=3(a^2+2ab+b^2)=3(a+b)^2.$$

Então, os fatores que irão compor o mmc são: 4, 3, $(a+b)^2$ e $(a-b)$.

Sendo assim, o mmc é dado por $3\cdot 4\cdot(a-b)(a+b)^2=12(a-b)(a+b)^2$. Logo:

$$\begin{aligned}\frac{a-b}{4a^2-4b^2}-\frac{a+b}{3a^2+6ab+3b^2}&=\frac{a-b}{4(a+b)(a-b)}-\frac{a+b}{3(a+b)^2}\\&=\frac{3(a+b)\cdot(a-b)-4(a-b)\cdot(a+b)}{12(a-b)(a+b)^2}\\&=\frac{(a+b)(a-b)(3-4)}{12(a-b)(a+b)^2}\\&=-\frac{1}{12(a+b)}\end{aligned}$$

sendo $a\neq -b$.

Multiplicação

Nessa operação, basta multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador, sendo que, se for possível, simplifica-se a fração algébrica resultante.

Exemplo 6.14 *Efetue o produto* $\dfrac{9a^2-4b^2}{9a^2-12ab+4b^2}\cdot\dfrac{12a-8b}{3ab+2b^2}$.

Resolução:

$$\begin{aligned}\frac{9a^2-4b^2}{9a^2-12ab+4b^2}\cdot\frac{12a-8b}{3ab+2b^2}&=\frac{(3a)^2-(2b)^2}{(3a)^2-2\cdot 3a\cdot 2b+(2b)^2}\cdot\frac{4(3a-2b)}{b(3a+2b)}\\&=\frac{(3a+2b)\,(3a-2b)\cdot 4(3a-2b)}{(3a-2b)^2\cdot b(3a+2b)}\\&=\frac{4}{b},\end{aligned}$$

sendo que deve-se ter $b\neq 0$ e $b\neq\pm\dfrac{3}{2}a$.

Divisão

Assim como nas frações numéricas, basta conservar a primeira fração e multiplicá-la pelo inverso da segunda; simplificando sempre que possível a fração algébrica resultante.

Exemplo 6.15 *Efetue a seguinte divisão* $\dfrac{8(x+y)}{(x-y)^2} : \dfrac{4(x+y)^2}{(x-y)}$.

Resolução:

$$\frac{8(x+y)}{(x-y)^2} : \frac{4(x+y)^2}{(x-y)} = \frac{8(x+y)}{(x-y)^2} \cdot \frac{(x-y)}{4(x+y)^2} = \frac{2}{(x-y)(x+y)} = \frac{2}{x^2-y^2},$$

onde $x \neq y$ e $x \neq -y$.

6.6 Exercícios

1. (OBMEP - 2007, Nível 2 da Lista 2) ***Expressão fracionária*** **-** Se $\frac{x}{y} = 2$, então $\frac{x-y}{x}$ é igual a:

   a) -1 b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) 2

2. (UFMG - 2003) O valor da expressão $\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^{-2}$ é:

   a) $\frac{ab}{(a+b)^2}$ b) $\frac{ab}{\left(a^2+b^2\right)^2}$ c) a^2+b^2 d) $\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$

3. (UFMG) Sendo $m > 0$, a expressão $\left(m^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right)\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right)$ é igual a:

   a) $m^{\frac{1}{2}}$ b) $m+1$ c) $m+2$ d) $m+\frac{1}{m}$ e) $m+3$

4. Fatore as expressões abaixo:

   a) $-9a^2+6a$ b) $10b^2+10b$
   c) $25x^2-25$ d) x^2-5x+6
   e) $24x^2-13x$ f) x^6-1
   g) $8a^3-8a^2+2a$ h) $x^4-2x^3+x^2$
   i) $x^2-y^2+4y-4x$ j) $x^2-y^2+2x+2y$
   k) $ab-ac+b^2-bc$ l) $2\pi-2l-\pi^2+\pi l$
   m) $9a^2-\frac{4}{81}$ n) $1-u^2$

5. (Puccamp) Considere as sentenças a seguir:

   I. $(3x-2y)^2 = 9x^2-4y^2$
   II. $5xy+15xm+3zy+9zm = (5x+3z)(y+3m)$
   III. $81x^6-49a^8 = (9x^3-7a^4)(9x^3+7a^4)$

   Dessas sentenças, SOMENTE:

   a) I é verdadeira. b) II é verdadeira. c) III é verdadeira.
   d) I e II são verdadeiras. e) II e III são verdadeiras.

6. Qual é a forma mais simplificada da expressão $\dfrac{2a+2b}{a^{-1}+b^{-1}}$ com $a, b \neq 0$?

   a) ab b) $2ab$ c) $a+b$ d) $2a+2b$

7. (UFPE) Se x e y são números reais distintos, então:

   a) $(x^2+y^2)/(x-y) = x+y$
   b) $(x^2-y^2)/(x-y) = x+y$
   c) $(x^2+y^2)/(x-y) = x-y$
   d) $(x^2-y^2)/(x-y) = x-y$
   e) Nenhuma das alternativas anteriores é verdadeira.

8. Considere o conjunto K de todos os valores de x e y que não anulam os denominadores de
   $$T = \frac{1}{x^2+xy} + \frac{1}{y^2+xy}.$$
   No conjunto K, a única expressão equivalente a T é:

   a) $\frac{1}{xy}$ b) $\frac{x+y}{xy}$ c) $\frac{1}{x+y}$ d) $\frac{x-y}{x+y}$ e) $\frac{2}{(x+y)^2}$

9. (UFMG - 2006) Sejam x e y números reais não nulos tais que $\frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = -2$. Então, é **CORRETO** afirmar que:

   a) $x^2 - y = 0$ b) $x + y^2 = 0$ c) $x^2 + y = 0$ d) $x - y^2 = 0$

10. Após a simplificação da expressão $\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2-2x-1}$, com $x \neq 1$ e $x \neq -\frac{1}{3}$, obtém-se:

    a) $\frac{3x+1}{2x-1}$ b) $\frac{2x-1}{3x+1}$ c) $\frac{2x+1}{3x-1}$ d) $\frac{3x-1}{2x+1}$ e) $\frac{3x-1}{2x-1}$

11. (PUC-MG) Se $A = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$, $x \neq \pm 2$ e $B = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-6x+9}$, $x \neq 3$, então o produto AB é igual a:

    a) $\frac{x^2}{x-3}$ b) $\left(\frac{x}{x-3}\right)^2$ c) $\frac{x+3}{x-3}$ d) $\frac{1}{x-3}$ e) $\frac{x^2(x-3)}{x+3}$

12. A forma simplificada da expressão $\dfrac{24y+6xy-15x-60}{10x-40-4xy+16y}$ é:

    a) $-\frac{3(x+4)}{2(x-4)},\ y \neq 5/2,\ x \neq 4$ b) $\frac{-2(x+4)}{3(x-4)},\ y \neq 5/2,\ x \neq 4$
    c) $\frac{2(x+4)}{3(x-4)},\ y \neq -5/2,\ x \neq -2$ d) $\frac{3(x-4)}{2(x+2)},\ y \neq -5/2,\ x \neq -2$
    e) $-3/2,\ y \neq -5/2,\ x \neq -4$

13. No conjunto de todos os valores de a e b que não anulam os denominadores de R, qual é a única expressão equivalente a R?
    $$R = \frac{4a^2}{4a^2-6ab} - \frac{18ab^2}{4a^3-9ab^2} - \frac{3b}{2a+3b}$$

    a) 1 b) 2 c) $4a^2$ d) $\frac{ab^2}{4a^2-9b^2}$ e) $\frac{4a}{4a^2-9b^2}$

14. (UFMG - 2005) Sejam a, b e c números reais e positivos tais que $\dfrac{ab}{b+c} = \dfrac{b^2-bc}{a}$. Então, é CORRETO afirmar que:

    a) $a^2 = b^2 + c^2$ b) $b = a + c$ c) $b^2 = a^2 + c^2$ d) $a = b + c$

15. (UFMG - *modificada*) Considere $P(x) = (x-1)(x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4)$. Usando diferença de quadrados é possível mostrar que $P(x)$ é igual a:

    a) $x^4(x^6 - 2x^2 + 1)$ b) $x^4(x^3-1)(x^3+1)$ c) $x^4(x^6 - 2x^4 + 1)$ d) $x^4(x^3-1)^2$

16. (FATEC) Se os números reais x e y são tais que $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$, então y é igual a:

    a) $2/7$ b) $\frac{x+2}{x+3}$ c) $\frac{x+1}{x+3}$ d) $\frac{x}{x+1}$ e) $\frac{2x+1}{3(x+1)}$

17. (Puccamp) Se os números reais x e y são tais que $y = \dfrac{x^4 - 16x^2}{x^2 + 10x + 24}$, então y é equivalente a:

    a) $\frac{x^2(x+2)}{x-1}$ b) $\frac{x-1}{x+1}$ c) $\frac{x^2(x-4)}{x-5}$ d) $\frac{x+4}{x-6}$ e) $\frac{x^2(x-4)}{x+6}$

18. (Fatec) Sejam os números reais A e B tais que $A = (x/y)(y/x)$ e $B = (x/y) + 1$. A expressão $A/(B-1)$ é igual a:

    a) 1 b) $\frac{x}{y}$ c) $\frac{y}{x}$ d) $\frac{y-1}{x}$ e) $-\frac{y+x}{x}$

19. (UFMG) A soma das raízes da equação $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} = 2$ é:

    a) -3 b) 1/3 c) 3 d) 9/2 e) 9

20. (UFMG) Resolvendo-se a equação $\dfrac{1}{x^2-5x+6} - \dfrac{1}{x-2} = 0$ com $x \neq 2$ e $x \neq 3$, pode-se afirmar que:

    a) O produto de suas raízes é 6.
    b) O produto de suas raízes é 12.
    c) O produto de suas raízes é 24.
    d) Sua única raiz é ímpar.
    e) Sua única raiz é par.

21. (Cesgranrio) Se m e n são raízes de $x^2 - 6x + 10 = 0$, então $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}$ vale:

    a) 6 b) 2 c) 1 d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{1}{6}$

22. (FUVEST) Dada a equação $\dfrac{2}{x^2-1} + \dfrac{1}{x+1} = -1$, então:

    a) $V = \emptyset$ b) $V = \{0; \pm 1\}$ c) $V = \{\pm 1\}$ d) $V = \{0; -1\}$ e) $V = \{0\}$

23. (FCC-SP) Se $\left(x^{-1} + y^{-1}\right)^{-1} = 2$, então y é igual a:

    a) $\frac{x}{1-2x}$ b) $-\frac{x}{1-2x}$ c) $\frac{2x}{x-2}$ d) $\frac{x-2}{2x}$ e) $\frac{x}{1+x}$

24. Qual é o resultado da divisão de $\dfrac{4}{(x-1)^2}$ por $\dfrac{4x}{x^2-1}$, sendo $x \neq 1$ e $x \neq 0$?

25. Simplifique ao máximo a expressão $\left(\dfrac{x+y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+y}\right) \cdot \left(\dfrac{x-y}{xy}\right)$.

26. A expressão $(2a+b)^2 - (a-b)^2$ é igual a:

    a) $3a^2+2b^2$ b) $3a(a+2b)$ c) $4a^2+4ab+b^2$ d) $2ab(2a+b)$ e) $5a^2+2b^2-ab$

27. Considere o conjunto $U = \mathbb{R} - \{0,\ 1\}$, em que está definida a expressão

$$M = \frac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}.$$

No conjunto U, a única expressão equivalente a M é:

    a) 1 b) n^2 c) $n+1$ d) $\dfrac{n}{n+1}$ e) $\dfrac{1}{(n+1)^2}$

28. (ESpCEx - *modificada*) Sendo $X = x + \dfrac{y-x}{1+xy}$ e $Y = 1 - \dfrac{xy-x^2}{1+xy}$ com $xy \neq -1$, então $\dfrac{X}{Y}$ é:

    a) 1 b) $1+xy$ c) y d) $x-y$

29. A fração $\dfrac{x^2-4}{2x+4}$ pode ser escrita como:

    a) $\frac{2}{x-2}$ b) $\frac{x+1}{x+2}$ c) $\frac{x-2}{2}$ d) $\frac{x+2}{x-2}$

30. Sendo dados os polinômios $f = x^2$, $g = x^4+x^2$, $h = x^2+x^4+x^6$ e $k = 3x^6-6x^4+2x^2$, obter os números reais $a,\ b,\ c$ de modo que se tenha $k = af + bg + ch$.

31. A soma $\dfrac{-x^2+4x-1}{x^2-1} + \dfrac{x-2}{x+1}$ é igual a:

    a) $x-1$ b) $\frac{1}{x-1}$ c) $\frac{-x^2+5x-3}{x+1}$ d) $x+1$

32. Qual é a forma simplificada de $\left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right) : \left(a - \dfrac{b^2}{a}\right)$?

33. Simplificando a expressão $\dfrac{ax^2-ay^2}{x^2-2xy+y^2}$, vamos obter:

    a) $\frac{x+y}{x-y}$ b) $\frac{a}{x-y}$ c) $\frac{a(x+y)}{x-y}$ d) $a(x+y)$

34. (UnB) Sendo a e b dois números reais diferentes de zero, a expressão $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{2}{ab}$ é igual a:

    a) $\frac{b+2a}{a(a+b)}$ b) $\frac{3}{a^2b}$ c) $\frac{b+2a}{a^2b}$ d) $\frac{1}{a^2b}$

35. (UnB) A expressão $\dfrac{3a-4}{a^2-16}-\dfrac{1}{a-4}$, com $a \neq 4$, é igual a:

a) $\frac{1}{a-4}$ b) $\frac{2}{a-4}$ c) $\frac{1}{a+4}$ d) $\frac{2}{a+4}$

36. Simplificando a expressão $\dfrac{a^2+a}{b^2+b}\cdot\dfrac{a^2-a}{b^2-b}\cdot\dfrac{b^2-1}{a^2-1}$, teremos:

a) $\frac{a^2}{b^2}$ b) $\frac{b^2}{a^2}$ c) $\frac{a}{b}$ d) $\frac{b}{a}$

37. Simplificando a expressão $\dfrac{(a^2-1)+(a+1)}{(a^2-1)-(a-1)}$, obtemos:

a) a b) $\frac{a+1}{a-1}$ c) $\frac{a-1}{a+1}$ d) a

38. Simplificando a expressão $\dfrac{ax-ay}{x(x-y)-y(x-y)}$, obtemos:

a) a b) $\frac{1}{x-y}$ c) $\frac{a}{x-y}$ d) $\frac{a}{a+1}$

39. (ITA) Sobre o número $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{3}$ é correto afirmar que:

a) $x \in]0,\ 2[$ b) $x \in \mathbb{Q}$ c) $\sqrt{2x}$ é irracional. d) x^2 é irracional. e) $x \in]2,\ 3[$

40. (EEAR) Efetue: $\left(\dfrac{2y}{y-2}-\dfrac{2y^2}{y^2-4}-\dfrac{4}{y+2}\right):\dfrac{8}{y+2}$.

41. (CEFET) Sabendo que $x+y=1$ e $xy=-\frac{1}{2}$, qual é o resultado da adição $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$?

42. (EsPCEx) Simplifique a expressão: $\dfrac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}}$.

43. (Colégio Naval) Simplificar o máximo possível:

$$\left[\frac{(8+x)^3\left(x^2-4\right)}{\left(x^2+4x+4\right)\left(x^2-2x+4\right)(4-2x)}\right]^{-5}.$$

44. (CEFET) Simplificando a fração $\dfrac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)^2}{4ab^2+4abc}$ obtém-se:

a) $\frac{a(b-c)}{b}$ b) $\frac{a(b+c)}{b}$ c) $\frac{a(c-b)}{b}$ d) $\frac{d(b+c)}{a}$ e) $\frac{b(b-c)}{a}$

45. (UFMG) Simplificando a expressão $\dfrac{x^{3/2}+x-x^{1/2}-1}{x+2\sqrt{x}+1}$ definida para todo real $x \geq 0$, obtém-se:

a) $\sqrt{x}-1$ b) $\sqrt{x}$ c) $1-\sqrt{x}$ d) $1+\sqrt{x}$ e) $\sqrt{1+x}$

CAPÍTULO 7

Matrizes

7.1 Primeiro contato

Imagine que um nutricionista fez a avaliação de três atletas, denotados aqui por A_1, A_2 e A_3, e anotou, para cada um deles: *idade*, *índice de massa corpórea* (IMC), *altura* e *peso*. Esses valores podem ser dispostos em uma tabela, conforme se vê na Tabela 5.

Tabela 5 – Exemplo que representa o conjunto de dados relativos aos atletas, obtidos por um nutricionista, e dispostos em uma tabela.

	Idade (anos)	**IMC** (kg/cm^2)	**Altura** (cm)	**Peso** (kg)
A_1	18	24,56	155	59
A_2	31	29,04	178	92
A_3	45	25,71	165	70

Esses dados numéricos, dispostos em linhas e colunas, são um exemplo de matriz. Se apenas os dados numéricos forem apresentados, uma representação dessa matriz, que aqui denominaremos por M, é:

$$M = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \text{Coluna 1} & \text{Coluna 2} & \text{Coluna 3} & \text{Coluna 4} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 18 & 24,56 & 155 & 59 \\ 31 & 29,04 & 178 & 92 \\ 45 & 25,71 & 165 & 70 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow \text{Linha 1} \\ \leftarrow \text{Linha 2} \\ \leftarrow \text{Linha 3} \end{matrix} \end{array}$$

A utilização de matrizes é importante em várias áreas do conhecimento humano, como: na própria *Matemática*, *Computação*, *Engenharias*, *Meteorologia*, *Oceanografia* e muitas outras. Vejamos uma definição mais formal de matriz.

Definição 7.1 (Matriz) *Sejam $m \geq 1$ e $n \geq 1$ com $m, n \in \mathbb{N}$. Uma matriz de ordem $m \times n$ (lê-se: m por n) real, ou complexa, é uma distribuição de $m \cdot n$ números reais, ou complexos, em m linhas e n colunas, formando uma tabela que geralmente é apresentada de uma das seguintes formas:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Observação 7.1 *Nesse texto utilizaremos letras maiúsculas do nosso alfabeto para denotar matrizes, e quando quisermos deixar claro qual a ordem de uma matriz, indicaremos $m \times n$ como subscrito da letra que a representa. Por exemplo, $A_{2\times3}$ denota uma matriz A, cuja ordem é 2×3, isto é, que possui 2 linhas e 3 colunas. Já a matriz M, extraída dos dados da Tabela 5, é de ordem 3×4, então, pode-se denotá-la por $M_{3\times4}$.*

Exemplo 7.1 *Vejamos alguns exemplos de matrizes e suas respectivas ordens:*

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \pi & \sqrt{7} \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ possui ordem 2×5.

(b) $B = \begin{bmatrix} 8 & 12 & -5 & 3\pi \end{bmatrix}$ possui ordem 1×4.

(c) $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 2/3 \\ 0,3 \end{bmatrix}$ possui ordem 3×1.

(d) $D = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sin(\pi) \\ 0 & i^2 \end{bmatrix}$ possui ordem 2×2.

Observação 7.2 *Uma matriz M de ordem $m \times n$ também pode ser representada por*

$$M = (a_{ij})_{m\times n},$$

sendo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Essa representação indica, além da ordem da matriz, a localização de cada um dos seus elementos, a_{ij}, no sentido em que esse elemento é aquele que está na linha i e na coluna j.

Exemplo 7.2 *Considere as matrizes*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & i & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & \pi & 4 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2i & -8 \end{bmatrix}.$$

Elas podem ser representadas, respectivamente, por $B = (b_{ij})_{3\times4}$ e $C = (c_{ij})_{2\times3}$, onde, por exemplo, b_{13} indica o elemento da matriz B que está na primeira linha e na terceira coluna, isto é, $b_{13} = i$. Em C temos que $c_{12} = -1$, $c_{22} = 2i$, $c_{21} = 3$.

Também é possível construir uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ a partir do posicionamento dos seus elementos, isto é, com os valores de i e j.

Exemplo 7.3 *Obtenha a matriz $A_{2\times 3}$ sabendo que $a_{ij} = -2i + j^2$.*

Resolução: *Como a matriz tem ordem 2×3 segue que ela tem que possuir $2\cdot 3 = 6$ elementos, $1 \le i \le 2$ e que $1 \le j \le 3$. Vejamos como obtê-los:*

$$\begin{array}{ll}
a_{11} = -2\cdot 1 + 1^2 = -2+1 = -1 & a_{12} = -2\cdot 1 + 2^2 = -2+4 = 2 \\
a_{13} = -2\cdot 1 + 3^2 = -2+9 = 7 & a_{21} = -2\cdot 2 + 1^2 = -4+1 = -3 \\
a_{22} = -2\cdot 2 + 2^2 = -4+4 = 0 & a_{23} = -2\cdot 2 + 3^2 = -4+9 = 5.
\end{array}$$

Portanto, a matriz A é dada por $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Igualdade entre matrizes

Definição 7.2 *Considere duas matrizes de mesma ordem, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$. Dizemos que $A = B$ se e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$ para quaisquer valores possíveis de i e j.*

Portanto, duas matrizes são ditas iguais quando possuem a mesma ordem e seus elementos correspondentes (elementos de mesmo índice) são iguais.

Exemplo 7.4

a) *Considere as três matrizes abaixo, todas de ordem 2:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\ \text{e}\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então $A = B$ já que seus elementos correspondentes são iguais, ou seja:

$$a_{11} = b_{11} = -1,\ a_{12} = b_{12} = 2,\ a_{21} = b_{21} = -3\ \text{e}\ a_{22} = b_{22} = 0.$$

Também vale que $A \neq C$, pois $-1 = a_{11} \neq 1 = c_{11}$.

b) *Considere as matrizes abaixo:*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2t^2 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}\ \text{e}\ B = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 18 \\ -3 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $t \in \mathbb{R}$, quais são as condições para t que garantam que $A = B$?

Resolução: *Para resolver esse problema, basta observar que a única condição que falta para garantir a igualdade é que $2t^2$ seja igual a 18. Logo:*

$$2t^2 = 18 \Rightarrow t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm\sqrt{9} \Rightarrow t = \pm 3.$$

Sendo assim, $A = B$ apenas quando $t = 3$ ou $t = -3$.

7.2 Tipos de matrizes

Nessa seção, estudaremos alguns dos principais tipos de matrizes. Esse estudo é importante devido ao fato de essas matrizes serem muito comuns em algumas aplicações práticas, serem úteis em demonstrações e também por possuirem características interessantes relativas aos números de linhas e colunas e também dos seus elementos. Essas matrizes recebem nomes específicos para facilitar sua identificação ou utilização.

Matriz linha

É qualquer matriz de ordem $1 \times n$, isto é, que possua apenas uma linha. Sua representação pode ser da forma $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$.

Exemplo 7.5 $T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ e $W = \begin{bmatrix} \pi & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Matriz coluna

É qualquer matriz que possua apenas uma coluna, ou seja, que tiver ordem $m \times 1$, e cuja representação é da forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7.6 $A = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ \pi \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \end{bmatrix}$.

Matriz nula

É toda matriz $A_{m \times n}$ composta apenas por zeros. Então, são da forma: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo 7.7 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$.

Observação 7.3 *É comum considerar a notação $\overline{0}$ para representar a matriz nula de ordem $m \times n$. Quando não gerar ambiguidade, também pode-se utilizar o símbolo* 0.

Quadrada

Denomina-se por *matriz quadrada* de ordem n qualquer matriz do tipo $n \times n$, ou seja, são as matrizes que possuem o número de linhas igual ao número de colunas. Então, pode-se representá-las genericamente, da forma:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 7.8 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \tan(\pi) & 9 & \sqrt{-1} \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos(2\pi) & \sqrt{11} \\ 5/3 & 9 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$.

Observação 7.4 *Atente para o fato de que se uma matriz é quadrada, basta informar que ela é de ordem n, não sendo necessário expressar que é do tipo $n \times n$. Para ilustrar, para a matriz A do Exemplo 7.8 basta dizer que sua ordem é 3.*

Uma matriz quadrada possui dois conjuntos de elementos que são muito importantes. As diagonais **principal** e **secundária**. Vejamos as definições desses dois conjuntos:

Definição 7.3 *A diagonal principal de uma matriz quadrada A, de ordem n, é o conjunto formado pelos elementos que tem os dois índices iguais, ou seja:*

$$\{a_{ij} \mid i = j\} = \{a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ \ldots,\ a_{nn}\}.$$

Já a diagonal secundária é o conjunto formado pelos elementos que tem soma dos índices igual a $n+1$, isto é:

$$\{a_{ij} \mid i + j = n + 1\} = \{a_{1n},\ a_{2,(n-1)},\ a_{3,(n-1)},\ \ldots,\ a_{n1}\}.$$

Exemplo 7.9

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{3} & -1 & 0 \\ 1 & \boxed{3} & 4 \\ 4 & 3 & \boxed{2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \boxed{0} & \pi & 1 & 3 \\ 1 & \boxed{-1} & 2 & 5 \\ 2 & 0 & \boxed{1} & 4 \\ -1 & 0 & 4 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária *Diagonal principal* *Diagonal secundária* *Diagonal principal*

Diagonal

É toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

Exemplo 7.10 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\pi/2) \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Identidade

A matriz identidade de ordem n, denotada por I_n, é qualquer matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

Exemplo 7.11 $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$.

Triangular superior

É qualquer matriz quadrada em que $a_{ij} = 0\ \forall\ i > j$, ou seja, onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

Exemplo 7.12 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 9 & \pi \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Triangular inferior

É qualquer matriz quadrada em que $a_{ij} = 0\ \forall\ i < j$, ou seja, onde todos os elementos acima da diagonal principal são nulos.

Exemplo 7.13 $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Simétrica

Uma matriz quadrada A é chamada de simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$. Em outras palavras, uma matriz será simétrica quando os elementos dispostos simetricamente em relação à diagonal principal forem iguais.

Exemplo 7.14 $\begin{bmatrix} x & b & c \\ b & y & d \\ c & d & z \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix}$.

7.3 Operações básicas com matrizes

No trato com as matrizes, surgem naturalmente operações importantes e que são fundamentais tanto na própria matemática quando nas aplicações práticas. As principais desses operações serão tratadas aqui.

Adição

Definição 7.4 *Sejam as matrizes* $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ *e* $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$. *Então,*

$$A + B = C_{m\times n},\ tal\ que\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ \forall\ i, j.$$

Em outras palavras, a soma das matrizes A e B, ambas de ordem $m \times n$, é a matriz C, também de ordem $m \times n$, em que cada elemento é a soma dos elementos correspondentes em A e B.

Exemplo 7.15

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sin(\pi) \\ 1 & 2 & \cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-2) & 3+0 & -2+\sin(\pi) \\ 0+1 & 1+2 & 3+\cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Multiplicação por um escalar

Definição 7.5 *Seja a matriz* $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ *e um escalar (número)* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Define-se o produto de* α *por* A *da seguinte forma:*

$$\alpha A = B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n},\ onde\ b_{ij} = \alpha a_{ij}\ \forall\ i, j.$$

A matriz $B = \alpha A$ *é geralmente chamada de multiplo escalar de* A.

Exemplo 7.16

a) $-3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\cdot(-1) & -3\cdot 2 \\ -3\cdot 0 & -3\cdot(-1/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

b) $i \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2i \\ -4i \\ 1 \end{bmatrix}.$

Propriedades 7.1 *Para quaisquer matrizes A, B e C de ordem $m \times n$, a adição entre elas goza das seguintes propriedades:*

1. $(A+B)+C = A+(B+C)$ (*Associatividade*)
2. $A+B = B+A$ (*Comutatividade*)
3. *Existe, e é única, a matriz $\overline{0}_{m\times n}$ tal que $A+\overline{0} = \overline{0}+A = A$.* (*Existência do elemento neutro*)
4. Existe, e é única, a matriz $-A_{m\times n} = -1 \cdot A$ tal que $A+(-A) = \overline{0}$. (Existência da oposta)

Exemplo 7.17 *A oposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $-A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, pois $A+(-A) = \overline{0}$.*

Diferença

A diferença é um caso particular da adição de matrizes, conforme pode-se observar na Definição 7.6.

Definição 7.6 *Sejam duas matrizes de ordem $m \times n$, A e B. Define-se a diferença $A-B$ como sendo a soma de A com o simétrico de B, ou seja, $A-B = A+(-B)$.*

Exemplo 7.18 *Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1/2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1/2 \end{bmatrix}$. Então:*

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1/2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1/2 \end{bmatrix}}_{-B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Transposição

Definição 7.7 *Dada uma matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, chama-se de matriz transposta de A à matriz $A^t = \left(b_{ij}\right)_{n\times m}$ cujas linhas são as colunas de A, ou seja, $b_{ij} = a_{ji}$.*

Exemplo 7.19

1. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$. Observe que A tem ordem 3×2 e que A^t tem ordem 2×3.
2. Se $R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \pi & 3 & 7 \end{bmatrix} \Longrightarrow R^t = \begin{bmatrix} 1 & \pi \\ -2 & 3 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.

Observação 7.5 *Em particular, observe que uma matriz quadrada A será simétrica quando $A = A^t$.*

Multiplicação

Definição 7.8 *Sejam duas matrizes, onde, obrigatoriamente, o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda,* $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times t}$ *e* $B = \left(b_{ij}\right)_{t\times n}$*. Define-se o produto* AB *como segue*

$$AB = C_{m\times n} = \left(c_{ij}\right)_{m\times n},$$

onde cada elemento c_{ij} *de* C *é obtido da forma*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{t} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{it}b_{tj}. \tag{7.1}$$

Vale lembrar que a notação de somatório, $\sum_{k=1}^{t}$ significa a soma de todos os termos cujo índice varia de $k = 1$ até t.

Exemplo 7.20 *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observe que o produto AB *está bem definido, já que o número de colunas de* A *é igual ao número de linhas de* B*. Além disso, a matriz* $C = AB$ *herdará o número de linhas de* A *e o de colunas de* B*, o que implica, nesse caso, que* C *será uma matriz de ordem* 3*. Sendo assim, de maneira genérica temos que*

$$AB = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -5 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -19/2 & -9/2 & -9/2 \end{bmatrix}.$$

Os valores obtidos para cada um dos elementos c_{ij} *de* $C = AB$ *foram obtidos ao se utilizar a Equação (7.1). Para obter* c_{11}*, por exemplo, observe que* $i = 1$ *e* $j = 1$ *estão fixos, assim como o valor de* t*, que para a matriz* B *é* 2*, o que implica em:*

$$\begin{aligned}
c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = -3\cdot 5 + (-1)\cdot 1 = -15 - 1 = -16\\
c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = -3\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) = -6 + 1 = -5\\
c_{13} &= a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} = -3\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) = 0 + 1 = 1\\
c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = -1\cdot 5 + 1\cdot 1 = -5 + 1 = -4\\
c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = -1\cdot 2 + 1\cdot(-1) = -2 - 1 = -3\\
c_{23} &= a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} = -1\cdot 0 + 1\cdot(-1) = 0 - 1 = -1\\
c_{31} &= a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} = -2\cdot 5 + 1/2\cdot 1 = -10 + 1/2 = -19/2\\
c_{32} &= a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} = -2\cdot 2 + 1/2\cdot(-1) = -4 - 1/2 = -9/2\\
c_{33} &= a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} = -2\cdot 0 + 1/2\cdot(-1) = 0 - 1/2 = -1/2
\end{aligned}$$

Observação 7.6 *Atente para o fato de que, se a multiplicação entre duas matrizes for bem definida (número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda), para* ***facilitar a aplicação da definição de produto de matrizes****, cada elemento da matriz resultado pode ser considerado como o produto da linha pela coluna correspondente. Isso pode ser ilustrado pelo Exemplo 7.20, onde o elemento* c_{11} *é o produto da primeira linha de* A *pela primeira coluna de* B*, o elemento* c_{12} *é o produto da primeira linha de* A *pela segunda coluna de* B*, e assim sucessivamente. Nesse caso, define-se o produto de uma linha por uma coluna, como sendo a soma dos produtos entre os elementos correspondentes.*

Exemplo 7.21 *Considere duas matrizes genéricas $A_{4\times 5}$ e $B_{5\times 3}$. É possível efetuar AB? E BA? Justifique suas respostas.*

Resolução: Pela definição de multiplicação de matrizes, temos que é condição necessária e suficiente para que o produto AB seja bem definido, que o número de colunas da primeira matriz, nesse caso A, seja igual ao número de linhas da segunda, nesse caso B. Então, como isso acontece, é claro que é possível se efetuar AB. Já a segunda multiplicação, BA, requer que o número de colunas de B, 3, seja igual ao número de linhas de A, 4. Observem que isso não acontece, o que significa que não é possível efetuar essa multiplicação.

Definição 7.9 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n, e considere $m \in \mathbb{N}$. Define-se $A^0 = \overline{0}$, $A^1 = A$ e $A^m = \underbrace{A\cdot A\cdot A\cdot \ldots \cdot A}_{m\ vezes}$, quando $m > 1$.*

Propriedades 7.2 *Sejam A, B e C matrizes de ordens adequadas. Então, valem as seguintes propriedades:*

1. Em geral, $AB \neq BA$. Quando ocorrer que $AB = BA$, dizemos que A e B **comutam**.
2. $A(BC) = (AB)C$ (Associatividade)
3. $(A+B)C = AC + BC$ (Distributividade à direita)
4. $C(A+B) = CA + CB$ (Distributividade à esquerda)
5. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB), \ \forall\ \alpha \in \mathbb{C}$
6. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A, \ \forall\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$
7. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B, \ \forall\ \alpha \in \mathbb{C}$
8. $I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$ (Existência do elemento neutro da multiplicação, I_n)
9. $A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$

7.4 Exercícios

1. Utilizando as matrizes abaixo, quando for possível efetue o que se pede, e quando não for, justifique.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2/3 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) $A^2 + B^2$ b) $-3\cdot(A+B)$ c) $(E^t)^2 + (F^t)^2$

d) $DE + F$ e) $D^tE + B$ f) $DA + F$

g) $(DA+F)^t$ h) $CB + 2A$ i) $B^tC + 2B$

2. Demonstre ou dê um contra-exemplo: *Seja A uma matriz quadrada. Então, A é nula, se e somente se, é diagonal.*

3. Verifique se $A = B$ considerando que $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4. Efetue o seguinte produto:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 1/2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

5. (UPA) Na matriz $A = (a_{ij})_{5\times 4}$, onde $a_{ij} = 4i - j^2$, o valor de $2a_{52}$ é:

   a) 16   b) 24   c) 32   d) 48   e) 64

6. (UFLA - *Modificada*) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de ordem 3 em que cada elemento é dado por $a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$. Encontre os elementos da matriz A.

7. Construa as matrizes:

   a) $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 2i+j & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i = j \end{cases}$.

   b) $B = (b_{ij})_{3\times 2}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} 2i+3j & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i > j \\ 1 & \text{se } i < j \end{cases}$.

   c) $C = (c_{ij})_{2\times 4}$ tal que $c_{ij} = \begin{cases} 2^{i+j} & \text{se } i \neq j \\ j^2 - 2i + 1 & \text{se } i = j \end{cases}$.

8. Determine a matriz X a partir de $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   a) $X = 2A - 3B - C$ b) $2X - A + 3B = 0$

9. Considerando as matrizes A e B do exercício anterior, determine a matriz X tal que $X = \left(A \cdot B^t\right)^t$.

10. Sejam as matrizes $Z = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ e $W = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ a & b \end{bmatrix}$. Determine a e b para que se tenha $ZW = WZ$.

11. Sabe-se que a matriz $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a^2 & 0 & 1-b \\ a & b-3 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica. Quais devem ser os valores de a e b?

12. Determine x, y, z e w de modo que $B = \begin{bmatrix} 0 & w^2+1 & x \\ y-1 & z & 0 \\ 0 & z-3 & y \end{bmatrix}$ seja diagonal.

13. (FGV) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. A soma dos elementos da matriz A^{100} e:

   a) 102   b) 118   c) 150   d) 175   e) 300

14. Na Propriedade 7.2 foi comentado que as propriedades eram válidas desde que qualquer multiplicação entre as matrizes A, B e C esteja bem definida. Analise as ordens necessárias para cada uma das propriedades, considerando $A_{m\times n}$, $B_{r\times t}$ e $C_{u\times v}$.

15. Já foi observado no Exemplo 7.21 que é possível o produto AB estar definido e BA não estar. Contudo, também é possível que AB e BA estejam definidos, e, mesmo assim, seus resultados serem distintos. Dê exemplos de duas matrizes, A e B, em que AB e BA estejam definidos e que $AB \neq BA$.

16. Se $x, y \in \mathbb{R}$ sabemos que $xy = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $y = 0$. Mostre que esse mesmo resultado não é válido para matrizes, ou seja, $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ ou $B = 0$, usando as seguintes matrizes.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17. Uma das propriedades da multiplicação de números reais é a lei do cancelamento, que afirma que se $x, y, z \in \mathbb{R}$ com $z \neq 0$, $xz = yz \Rightarrow x = y$. Usando as matrizes A e B do exercício anterior, e a matriz $C = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, mostre que $AC = BC \nRightarrow A = B$.

18. Obtenha os valores possíveis para w, x, y e z na equação seguinte matricial:
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ -10 & 18 \end{bmatrix}.$$

19. Sejam as matrizes $X = \begin{bmatrix} a & -2 & 4 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$. Encontre o valor de a que garanta que $YX^t = 0$.

20. Quais são os tipos de matrizes diagonais, K, de ordem 2, que satisfazem $K^2 = 2K$?

21. Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Use as partes 3 e 4 das Propriedades 7.2 para mostrar que:

    a) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$, desde que $AB = BA$.

    b) $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$. Quando ocorre a igualdade?

22. Se $X = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 9 & 2 & -5 \\ -2 & c & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica, então $a + b + c = 2$?

23. Seja a matriz de ordem 2, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Pode-se afirmar que a matriz $M = \begin{bmatrix} a & -3 \\ 1 & -b \end{bmatrix}$ é oposta de A se $a = -2$ e $b = 4$?

24. Dê exemplos de matrizes, A e B, ambas de ordem 2, em que $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$ e $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

25. (UFMG) Milho, soja e feijão foram plantados nas regiões P e Q, com ajuda dos fertilizantes X, Y e Z.

    A matriz A indica a área plantada de cada cultura, **em hectares**, por região e a matriz B indica a massa usada de cada fertilizante, **em kg**, por hectare, em cada cultura:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \textit{milho} & \textit{soja} & \textit{feijão} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 50 & 20 & 20 \\ 40 & 10 & 30 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow P \\ \leftarrow Q \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{X} & \text{Y} & \text{Z} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 15 & 20 & 20 \\ 30 & 20 & 30 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow milho \\ \leftarrow soja \\ \leftarrow feijão \end{array}$$

a) CALCULE a matriz $C = AB$.
b) EXPLIQUE o significado de C_{23}, o elemento da segunda linha e terceira coluna da matriz C.

26. (Mackenzie) Sejam as matrizes

$$A = (a_{ij})_{4\times 3},\ com\ a_{ij} = i^j \quad \text{e} \quad B = (b_{ij})_{3\times 4},\ com\ b_{ij} = j^i.$$

Se $C = AB$, então c_{22} vale:

a) 3 b) 39 c) 84 d) 14 e) 258

27. A partir da equação matricial $\begin{bmatrix} z & w \\ a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ tem-se, necessariamente que:

a) $z = w$ e $a = b$ b) $w = -2z$ e $b = -2a$ c) $z = w = 0$
d) $z = -2w$ e $a = -2b$ e) $z = w = a = b = 0$

28. (Mackenzie) Se A é uma matriz 3×4 e B uma matriz $n \times m$, então:

a) existe $A + B$ se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$;
b) existe AB se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$;
c) existem AB e BA se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$;
d) existem, iguais, $A + B$ e $B + A$ se, e somente se, $A = B$;
e) existem, iguais, AB e BA se, e somente se, $A = B$.

29. (FGV) A organização econômica Merco é formada pelos países 1, 2 e 3. O volume anual de negócios realizados entre os três parceiros é representado em uma matriz A, com 3 linhas e 3 colunas, na qual o elemento da linha i e coluna j informa quanto o país i exportou para o país j, em bilhões de dólares. Se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1,2 & 3,1 \\ 2,1 & 0 & 2,5 \\ 0,9 & 3,2 & 0 \end{bmatrix}$$

então o país que mais exportou e o que mais importou no Merco foram, respectivamente:

a) 1 e 1 b) 2 e 2 c) 2 e 3 d) 3 e 1 e) 3 e 2

30. (UNESP) Considere três lojas, L_1, L_2 e L_3, e três tipos de produtos, P_1, $P2$ e P_3. A matriz a seguir descreve a quantidade de cada produto vendido por cada loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade do produto P_i vendido pela loja L_j, onde $i, j = 1, 2, 3$.

$$\begin{bmatrix} 30 & 19 & 20 \\ 15 & 10 & 8 \\ 12 & 16 & 11 \end{bmatrix}$$

Analisando a matriz, podemos afirmar que:

a) a quantidade de produtos do tipo P_2 vendidos pela loja L_2 é 11.

b) a quantidade de produtos do tipo P_1 vendidos pela loja L_3 é 30.

c) a soma das quantidades de produtos do tipo P_3 vendidos pelas três lojas é 40.

d) a soma das quantidades de produtos do tipo P_i vendidos pelas lojas L_i, $i = 1, 2, 3$, é 52.

e) a soma das quantidades dos produtos dos tipos P_1 e P_2 vendidos pela loja L_1 é 45.

31. (Faap-SP) Uma montadora produz três modelos de veículos, A, B e C. Neles podem ser instalados dois tipos de air bags, D e E. A matriz [*air bag modelo*] mostra a quantidade de unidades de air bags instaladas:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ E \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Numa determinada semana foram produzidas as seguintes quantidades de veículos, dadas pela matriz [*modelo-quantidade*]:

$$\begin{array}{cc} & Qtde. \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \\ x \end{pmatrix} \end{array}$$

O produto da matriz [*air bag modelo*] pela matriz [*modelo-quantidade*] é $\begin{bmatrix} 1600 \\ 3600 \end{bmatrix}$. Quantos veículos do modelo C foram montados na semana?

a) 300 b) 150 c) 100 d) 200 e) 0

32. (UEL – PR) Uma das formas de se enviar uma mensagem secreta é por meio de códigos matemáticos, seguindo os passos:

a) Tanto o destinatário quanto o remetente possuem uma matriz chave C;

b) O destinatário recebe do remetente uma matriz P, tal que $MC = P$, onde M é a matriz mensagem a ser decodificada;

c) Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto: $1 = a$, $2 = b$, $3 = c$, $\ldots$, $23 = z$;

d) Consideremos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras, k, w e y.

e) O número zero corresponde ao ponto de exclamação.

f) A mensagem é lida, encontrando a matriz M, fazendo correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue: $m_{11} m_{12} m_{13} m_{21} m_{22} m_{23} m_{31} m_{32} m_{33}$.

Considere as matrizes: $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{bmatrix}$

Com base nos conhecimentos e nas informações descritas, assinale a alternativa que apresenta a mensagem que foi enviada por meio da matriz M.

a) Boasorte! b) Boaprova! c) Boatarde! d) Ajudeme! e) Socorro!

33. (UFRGS - *Modificada*) A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usadas em um restaurante.

$$C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} arroz \\ carne \\ salada \end{array}$$

A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usados na composição dos pratos tipo P_1, P_2 e P_3 desse restaurante:

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} arroz & carne & salada \end{array} \end{array} \begin{array}{l} prato\, P_1 \\ prato\, P_2 \\ prato\, P_3 \\ \end{array}$$

Qual é a matriz que fornece, em reais, o custo de produção dos pratos $P_1,\ P_2,\ P_3$?

a) $\begin{bmatrix} 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}^t$ b) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}^t$ c) $\begin{bmatrix} 9 & 11 & 4 \end{bmatrix}^t$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}^t$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}^t$

34. (UFRGS - *Modificada*) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, determine a matriz A^2.

CAPÍTULO 8

Sistemas de Equações Lineares

8.1 Equações lineares

Definição 8.1 (Equação linear) *Uma equação linear nas n variáveis reais,* $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$*, é toda equação da forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

onde tanto os coeficientes, $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$*, e o termo independente, b, são números reais.*

Exemplo 8.1 *As equações* a, b, c *e* d *são lineares e as equações* e, f *e* g *são não lineares:*

a) $2x - 3y = 4$ b) $-4x_2 - 8x_2 + 9x_3 = \pi$ c) $6x - 2y + 8z = 0$ d) $-x + y = 1$

e) $6xy + y^2 - z^{1/2} = 0$ f) $\sqrt{3x} - 2\cos(x)y = 1$ g) $3^y + 4xy = 3$

Definição 8.2 *Chama-se de solução de uma equação linear em n variáveis, qualquer n-upla de números reais* $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ *que ao terem suas coordenadas substituídas ordenadamente na equação, a satisfaçam, ou seja, quando* $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = b$*.*

Exemplo 8.2 *Considere as equações lineares* $I:\ 2x + 3y - 2z = 1$ *e* $II:\ -7x - 2y + z = 5$*. A sequência* $(3,\ -3,\ -2)$ *é solução da equação* I*, pois ao se substituir as variáveis x, y e z por* $3,\ -3$ *e* -2*, respectivamente, tem-se que*

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-2) = 6 - 9 + 4 = -3 + 4 = 1,$$

ou seja, a sequência satisfaz à equação. O mesmo não ocorre para a equação II*, já que ao se fazer a substituição se obtém*

$$-7 \cdot 3 - 2 \cdot (-3) + (-2) = -21 + 6 - 2 = -17.$$

Observação 8.1 *Nem toda equação linear possui solução. Um exemplo é a equação* $0x + 0y + 0z + 0w = 9$*. Observe que independente dos valores que possam ser atribuídos às variáveis x, y, z e w, o lado esquerdo dessa equação sempre será nulo, enquanto o lado direito será sempre 9, gerando a igualdade* $0 = 9$*, que é obviamente falsa! Logo, nenhuma equação linear da forma* $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = k$*, com* $k \neq 0$*, terá solução, pois não existe sequência* $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ *que a satisfaça.*

8.2 Sistemas de equações lineares

É comum, principalmente em problemas de aplicações da matemática em outras áreas do conhecimento, onde se faz necessário o modelamento matemático de problemas práticos, se ter obter várias equações lineares, onde se procuram soluções que satisfaçam a todas elas simultaneamente. Para esse conjunto de equações dá-se o nome de *sistema de equações lineares.*

Definição 8.3 *Um Sistema de Equações Lineares de m equações e n incógnitas é todo conjunto S da forma*

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. .$$

sendo que para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ vale que $a_{ij},\ b_i \in \mathbb{R}$.

Definição 8.4 *Diremos que uma n-upla de números reais, $\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$, é uma solução do sistema S, quando ela for solução de todas as m equações. Chamamos de conjunto solução do sistema S, ao conjunto formado por todas as soluções possíveis de S.Sendo assim,* resolver *um sistema de equações lineares, significa obter o seu conjunto de soluções possíveis.*

Exemplo 8.3 *Considere o sistema*

$$S : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & 3y & + & 2z & = & 16 \\ 2x & - & y & + & z & = & 9 \end{array} \right.$$

e a sequência $\alpha = (3,\ -1,\ 2)$. Ao se substituir x por 3, y por -1 e z por 2, em todas as equações, verifica-se que todas são satisfeitas. Logo, α é uma solução desse sistema.

8.3 Sistemas lineares como equações matriciais

Usando as definições de produto e igualdade entre matrizes é possível escrever o sistema S da Definição 8.3 como a seguinte equação matricial

$$AX = B,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

As matrizes A, X e B são denominadas, respectivamente, por: ***matriz de coeficientes***, ***matriz das incógnitas*** e ***matriz dos termos independentes***.

Já a matriz formada pela matriz de coeficientes juntamente com a matriz dos termos independentes, é denominada ***matriz aumentada*** de S e é representada por

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Exemplo 8.4 *A representação matricial do sistema S do Exemplo 8.3 é*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 16 \\ 9 \end{bmatrix}$$

e sua matriz aumentada é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 16 \\ 2 & -1 & 1 & 9 \end{array}\right].$$

A matriz aumentada é muito útil na resolução de sistemas pelo método de ***escalonamento***, também conhecido como método de ***Gauss-Jordan***, e que estudaremos mais adiante.

8.4 Classificação

Demonstra-se que um sistema de equações lineares S, admite uma e apenas uma das três classificações: **Possível e determinado**, **Possível e indeterminado** e **Impossível**.

- **Possível e determinado:** é quando o sistema admite apenas uma solução.
- **Possível e indeterminado:** é quando o sistema admite infinitas soluções.
- **Impossível:** é quando o sistema não admite solução.

Nos dois casos onde o sistema pode ser classificado como possível, também é comum chamá-lo de *compatível* ou *consistente*. No caso onde ele é impossível, também é comum dizer que ele é *incompatível* ou *inconsistente*.

8.5 Métodos de resolução de sistemas lineares

O objetivo dessa seção é rever o método de resolução de sistemas lineares denominado *resolução por substituição* e apresentar o método geral, denominado *resolução por escalonamento*.

Resolução por Substituição

É um método simples, mas útil apenas para sistemas com poucas equações e variáveis. Vejamos alguns exemplos da utilização desse método, de forma que se observe que as três classificações sejam obtidas.

Exemplo 8.5 *Resolva o sistema* $S_1 : \begin{cases} x+3y &= -7 \\ 2x-y &= 14 \end{cases}$.

Resolução: *Considere as equações* A *e* B *do sistema, conforme indicado*

$$S_1 : \begin{cases} x+3y &= -7 \text{ Ⓐ} \\ 2x-y &= 14 \text{ Ⓑ} \end{cases}$$

Isolando a incógnita x *na equação* Ⓐ *temos que* $x = -7-3y$ Ⓒ. *Levando* Ⓒ *em* Ⓑ, *vem que:*

$$2\cdot(-7-3y) - y = 14 \Longrightarrow -14-6y-y = 14 \Longrightarrow -7y = 28 \Longrightarrow y = -4.$$

Agora, substituindo y *por* -4 *na equação* Ⓒ *vem que:*

$$x = -7-3(-4) \Longrightarrow x = -7+12 \Longrightarrow x = 5.$$

Portanto, a solução do sistema S_1 *é o par ordenado* $(5,\ -4)$. *Além disso, como essa é a única solução do sistema, ele é classificado como* ***possível e determinado***.

Interpretação geométrica

Observe que as equações Ⓐ e Ⓑ do sistema S_1 são equações de retas. Sendo assim, resolver esse sistema consiste em obter os pontos do plano (ou pares ordenados) que estão nas duas retas simultaneamente, ou seja, os pontos de interseção entre essas duas retas. Para esse sistema, o ponto de interseção é único e dado por $(5,\ -4)$. Vejamos os gráficos dessas duas retas na Figura 3.

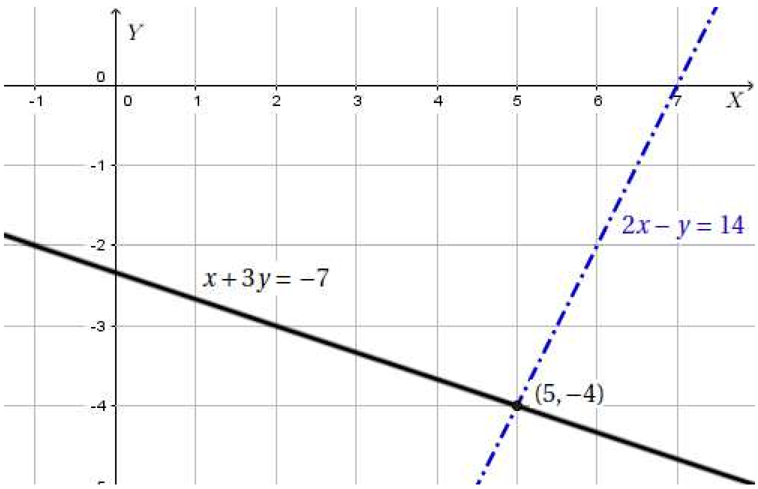


Figura 3 – Interpretação geométrica da solução do sistema S_1 que é possível e determinado, pela interseção das retas representadas por cada uma de suas equações.

Exemplo 8.6 *Resolva o sistema* $S_2 : \begin{cases} x+2y &= 3 \\ \dfrac{x}{2}+y &= \dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Resolução: *Isolando a variável* x *na primeira equação de* S_2 *tem-se que* $x = 3-2y$ ①. *Substituindo o resultado da equação* ① *na segunda equação de* S_2, *obtém-se:*

$$\frac{3-2y}{2}+y=\frac{3}{2} \Longrightarrow \frac{3-2y+2y}{2}=\frac{3}{2} \Longrightarrow \frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

Ao fazermos a substituição, observe que a incógnita y foi eliminada, o que indica que ela não possui restrição, ou seja, y pode ser qualquer número real. Já a equação ① mostra que o valor de x depende do valor de y, isto é, para cada valor de $y \in \mathbb{R}$ considerado, ter-se-á um valor respectivo para x.

*Em situações desse tipo, é comum denominar a variável que não possui restrição como **variável livre**. Nesse exemplo, y é a variável livre. Se fizermos $y = \alpha \in \mathbb{R}$, temos que a equação ① pode ser reescrita como $x = 3-2\alpha$ e que qualquer par ordenado da forma*

$$(x, y) = (3-2\alpha,\ \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

será uma solução do sistema S_2.

Uma forma de representar o conjunto solução S do sistema S_2 é

$$S = \left\{(x, y) \mid x = 3-2\alpha,\ y = \alpha \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

Logo, se considerarmos $\alpha = 0$, tem-se que $x = 3-2\cdot 0 = 3$. Então, uma solução particular de S_2 é o par ordenado $(3,\ 0)$.

Considerando $\alpha = -1$, vem que $x = 3-2\cdot(-1) = 5$, que implica em outra solução particular de S_2, que é o par $(5,\ -1)$.

*Portanto, como se tem infinitos valores possívies para α, ter-se-á infinitos valores para x, implicando em um número infinito de soluções possíveis para o sistema S_2. Então, ele é classificado como **possível e indeterminado**.*

Interpretação geométrica

Vejamos na Figura 4 a representação geométrica das duas equações do sistema S_2. Observe que a interseção entre as retas é composta exatamente por ambas.

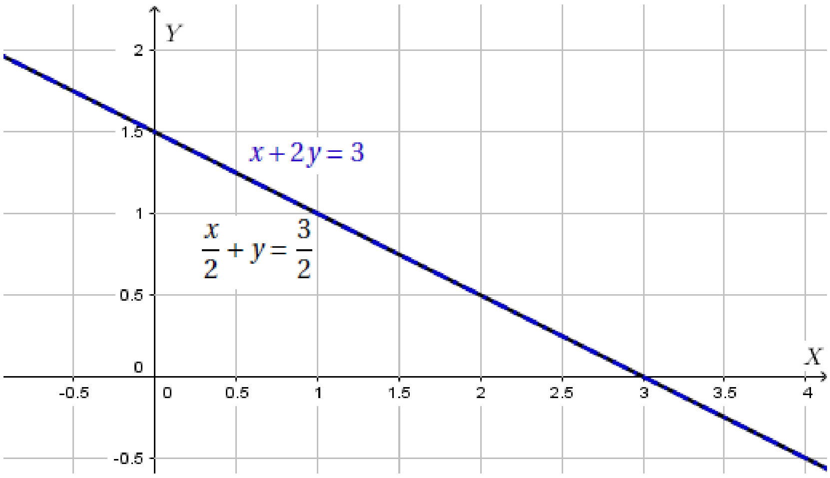


Figura 4 – Interpretação geométrica do sistema S_2, que é possível e indeterminado.

Sendo assim, como elas são coincidentes, todos os pontos sobre elas são soluções do sistema, e, é por isso, que o sistema S_2 tem infinitas soluções.

Exemplo 8.7 *Resolva o sistema* $S_3 : \begin{cases} x + y &= 3 \\ -x - y &= 1 \end{cases}.$

Resolução: *Ao se isolar a incógnita* y *na primeira equação de* S_3*, vem que* $y = 3 - x$ ①*. Substituindo o resultado da equação* ① *na segunda equação de* S_3*, obtém-se que*

$$-x - (3 - x) = 1 \Longrightarrow -x - 3 + x = 1 \Longrightarrow -3 = 1 \ (Absurdo!).$$

Esse resultado absurdo de que $-3 = 1$ *significa que independentemente dos valores considerados para a incógnita* x*, a igualdade nas equações nunca será satisfeita, ou seja, o sistema* S_3 *não admite solução. Logo, ele é classificado como* ***impossível****.*

O método de substituição foi apresentado aqui na resolução de sistemas de 2 equações e 2 incógnitas pois ele é mais comumente utilizado para esse tipo de sistema. Contudo, pode ser aplicado para outros tipos de sistemas, mas isso implicará em mais trabalho, devido as muitas substituições que serão necessárias.

Interpretação geométrica

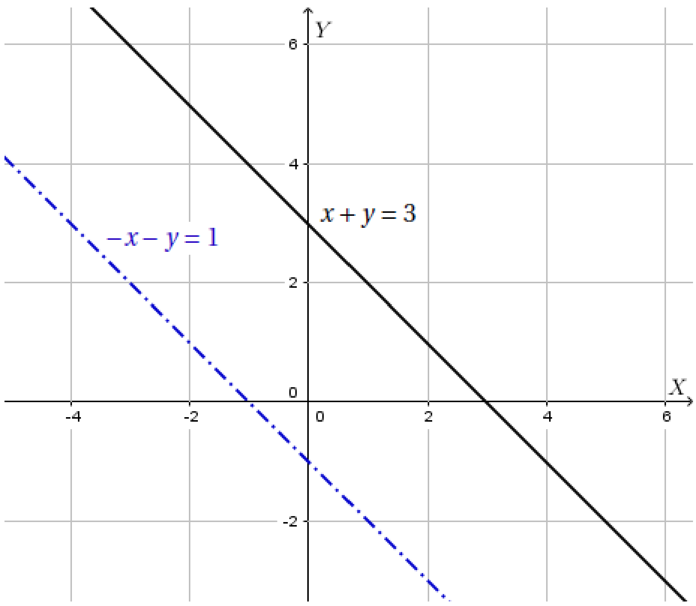


Figura 5 – Interpretação geométrica da solução de um sistema impossível, onde se observa que para essa situação, as retas serão paralelas.

Sendo assim, para sistemas com duas equações e duas incógnitas, temos três interpretações geométricas possíveis:

1. **Retas concorrentes**, quando o sistema for *possível e determinado.*
2. **Retas coincidentes**, quando o sistema for *possível e indeterminado.*
3. **Retas paralelas**, quando o sistema for *impossível.*

Esse tipo de interpretação geométrica também pode ser feita para sistemas lineares de três equações e três incógnitas, pois suas equações representam planos no espaço $\mathbb{R}^3$. Contudo, deixaremos para que vejam isso em cursos de geometria analítica.

Operações elementares

As operações elementares sobre as equações de um sistema, ou sobre as linhas da sua matriz aumentada, são três possíveis operações, muito úteis na resolução de sistemas lineares. São elas:

1. **Troca de posição entre as linhas i e j**, cuja representação será $L_i \longleftrightarrow L_j$, indicando que no lugar da linha i foi colocada a linha j e vice-versa.

   Exemplo 8.8 *Observe que o segundo sistema foi obtido pela troca de posição entre as linhas 2 e 3 do primeiro sistema.*

   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & & & = & -4 \\ 16x & + & 3y & + & \pi z & = & 3 \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & -1 \end{array}\right. \xrightarrow{L_2 \longleftrightarrow L_3} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & & & = & -4 \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & -1 \\ 16x & + & 3y & + & \pi z & = & 3 \end{array}\right.$$

   Para a matriz aumentada do primeiro sistema, tem-se que a segunda matriz foi gerada a partir da troca de posição entre as linhas 2 e 3 da primeira matriz.

   $$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & -4 \\ 16 & 3 & \pi & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \longleftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -4 & -1 \\ 16 & 3 & \pi & 3 \end{array}\right]$$

2. **Substituição da linha i por um múltiplo escalar não nulo dessa mesma linha**, cuja representação será $L_i \longrightarrow kL_i$, sendo k um escalar não nulo.

   Exemplo 8.9 *O segundo sistema foi obtido a partir do primeiro, fazendo-se a troca da linha 2, por ela mesma, multiplicada pelo escalar $k = -2$. Essa operação é inicada por $L_2 \longrightarrow -2L_2$.*

   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & & & = & -4 \\ 16x & + & 3y & + & \pi z & = & 3 \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & -1 \end{array}\right. \xrightarrow{L_2 \longrightarrow -2L_2} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & & & = & -4 \\ -32x & - & 6y & - & 2\pi z & = & -6 \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & -1 \end{array}\right.$$

   Usando a matriz aumentada do primeiro sistema para realizar a mesma operação elementar, tem-se que:

   $$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & -4 \\ 16 & 3 & \pi & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \longrightarrow -2L_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & -4 \\ -32 & -6 & -2\pi & -6 \\ 2 & 5 & -4 & -1 \end{array}\right]$$

3. **Substituição da linha i por ela mesma adicionada a um multiplo escalar não nulo da linha j**, cuja representação será $L_i \longrightarrow L_i + kL_j$, sendo k um escalar não nulo.

   Exemplo 8.10 *O segundo sistema foi obtido a partir do primeiro, fazendo-se a troca da linha 3, por ela mesma, adicionada à linha um previamente multiplicada por $k = -2$, ou seja, $L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1$.*

   $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & & & = & -4 \\ 16x & + & 3y & + & \pi z & = & 3 \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & -1 \end{array}\right. \xrightarrow{L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & & & = & -4 \\ 16x & + & 3y & + & \pi z & = & 3 \\ & & 11y & - & 4z & = & 7 \end{array}\right.$$

Usando a matriz aumentada do primeiro sistema para realizar a mesma operação elementar, tem-se que:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & -4 \\ 16 & 3 & \pi & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & -4 \\ 16 & 3 & \pi & 3 \\ 0 & 11 & -4 & 7 \end{array}\right]$$

Observação 8.2 *Nos exemplos apresentados, percebe-se que tanto faz aplicar as operações elementares nas linhas de um sistema ou nas linhas de sua matriz aumentada, pois a matriz obtida é exatamente a matriz aumentada do sistema gerado com as operações.*

Sistemas equivalentes e resolução

Definição 8.5 *Quando dois sistemas lineares possuem o mesmo conjunto solução, diz-se que eles são equivalentes.*

Teorema 8.1 *Ao se aplicar as operações elementares em um sistema de equações lineares, o sistema resultante será equivalente ao primeiro.*

A demonstração do Teorema 8.1 pode ser obtida em [26, p. 25].

O resultado garantido pelo Teorema 8.1 é de extrema importância nas técnicas de resolução de sistemas lineares. Isso porque, a partir dele pode-se concluir que para se resolver um determinado sistema linear, S_1, é suficiente que obtenhamos um novo sistema equivalente a S_1, digamos S_2, que possa ser resolvido facilmente, já que o conjunto solução de S_2 será o mesmo que S_1. Obviamente, para que se garanta que S_2 é equivalente a S_1, é obrigatório que se use, apenas, as operações elementares.

Exemplo 8.11 *Vamos resolver o sistema S_1 com base no Teorema 8.1, aplicando as operações elementares em suas linhas (suas equações).*

$$S_1 : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & - & z & = & 3 \\ 3x & - & 2y & + & 3z & = & -3 \\ x & - & 2y & + & z & = & -5 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow -3L_3 + L_2 \\ L_3 \longrightarrow \ \ 2L_3 + L_1 \end{array} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & - & z & = & 3 \\ & & 4y & & & = & 12 \\ & - & 3y & + & z & = & -7 \end{array}\right.$$

$$L_2 \longrightarrow \frac{1}{4}L_2 \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & - & z & = & 3 \\ & & y & & & = & 3 \\ & - & 3y & + & z & = & -7 \end{array}\right.$$

$$L_3 \longrightarrow 3L_2 + L_3 \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & - & z & = & 3 \\ & & y & & & = & 3 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right.$$

Sendo assim, pelo Teorema 8.1 segue que o sistema S_1 é equivalente ao sistema

$$S_2 : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & - & z & = & 3 \\ & & y & & & = & 3 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}\right.$$

O sistema S_2 pode ser resolvido facilmente, já que após as operações elementares serem aplicadas, obteve-se que $y = 3$ e $z = 2$ e, com isso, ao substituirmos esses valores na primeira equação do sistema, vem que:

$$-2x + 3 - 2 = 3 \Longrightarrow x = -1.$$

Sendo assim, $\alpha = (-1,\ 3,\ 2)$ é a única solução de S_2 e, portanto, a única solução do sistema original, S_1.

Observe, ainda, que a matriz aumentada do sistema S_2 é

$$M = \left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

e que se as operações elementares tivessem sido aplicadas na matriz aumentada de S_1, o resultado final seria a matriz M, a qual pode ser interpretada como o sistema S_2, que consequentemente seria resolvido.

Observe que a matriz M tem o formato de escada para os elementos não nulos. Matrizes desse tipo são chamadas de escalonadas. São dois, os métodos de resolução de sistemas lineares que estudaremos aqui. Um deles é baseado na obtenção de matrizes escalonadas e que é denominado método de ***Gauss***, e o outro, na obtenção de matrizes escalonadas reduzidas e denominado por método de ***Gauss-Jordan***.

Métodos de resolução: *Gauss* e *Gauss-Jordan*

Para ser possível o entendimento dos métodos de resolução de Gauss e de Gauss-Jordan, é necessário o entendimento do que vem a ser exatamente uma matriz escalonada e uma matriz escalonada reduzida. Vejamos as definições e exemplos:

Definição 8.6 *Dizemos que uma matriz está na forma **escalonada** (ou escalonada por linhas) quando as seguintes condições são satisfeitas:*

a) Todas as linhas nulas ficam abaixo das linhas não nulas.

b) O pivô (primeiro elemento não nulo de uma linha não nula) sempre ocorre à direita do pivô da linha anterior.

Definição 8.7 *Quando além das propriedades a) e b) da Definição 8.6, também forem válidas as condições c) e d), diremos que a matriz está na forma **escalonada reduzida**:*

c) O pivô de cada linha é sempre igual a 1.

d) Se uma coluna possui um pivô, então todos os outros elementos dessa coluna são nulos.

Exemplo 8.12 *As matrizes A, B e C estão na forma escalonada e as matrizes D, E e F estão na forma escalonada reduzida.*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & \pi \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \pi \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Observação 8.3 *A principal finalidade do pivô é que ele pode ser utilizado para zerar todos os elementos abaixo dele na sua coluna. Essa utilidade poderá ser observada nos exemplos que seguem.*

O método de Gauss

O método de resolução de sistemas lineares denominado ***Método de Gauss*** é baseado na aplicação de operações elementares na matriz aumentada do sistema até que ela fique na ***forma escalonada***, pois então, o sistema associado será de fácil resolução e equivalente ao primeiro.

Foi essa a técnica utilizada na resolução do Exemplo 8.11. Vejamos mais um exemplo:

Exemplo 8.13 *Resolva* $S:\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & - & 3z & = & -11 \\ 4x & - & 3y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 6 \\ 3x & + & y & + & z & = & 4 \end{array}\right.$ *pelo método de Gauss.*

Resolução: A matriz aumentada do sistema S é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & -3 & -11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right].$$

Sendo assim, aplicando operações elementares para deixá-la na forma escalonada temos:

$$L_1 \longleftrightarrow L_3 \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & -11 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow -4L_1 + L_2 \\ L_3 \longrightarrow \ \ 2L_1 + L_3 \\ L_4 \longrightarrow -3L_1 + L_4 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -14 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \longrightarrow 3L_2 + 7L_3 \\ L_4 \longrightarrow 2L_3 + 3L_4 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \\ 0 & 0 & -13 & -65 \\ 0 & 0 & -8 & -40 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \longrightarrow (-1/13)L_3 \\ L_4 \longrightarrow (1/8)L_4 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \longrightarrow L_3 + L_4 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -2 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Observe que a última matriz obtida pela aplicação das operações elementares satisfaz as condições da Definição 8.6 e, portanto, ela está na forma escalonada. Além disso, a linha nula pode ser desconsiderada, pois representa a equação $0x + 0y + 0z = 0$, que é verdadeira $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$. Sendo assim, o sistema associado a ela,

$$S' : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & - & 7y & - & 2z & = & -24 \\ & & & & z & = & 5 \end{array}\right.,$$

é equivalente a S, isto é, possuem o mesmo conjunto solução.

Usando que $z = 5$ e fazendo uma substituição de trás para frente, tem-se que

$$-7y - 2\cdot 5 = -24 \Longrightarrow y = 2 \quad \text{e que} \quad x + 2 + 5 = 6 \Longrightarrow x = -1.$$

Portanto, a única solução do sistema S é dada por $\alpha = (-1,\ 2,\ 5)$.

Exemplo 8.14 *Utilizando o método de Gauss, resolva o sistema S e apresente a sua classificação.*

$$S:\begin{cases} x + y - z + w = 1\\ 3x - y + 2z + w = 2\\ -x - 2y + 3z + 2w = -1\end{cases}$$

Resolução: A matriz aumentada do sistema S é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2 & 1 & 2\\ -1 & -2 & 3 & 2 & -1\end{array}\right].$$

Vamos começar utilizando o pivô da linha L_1 para zerar os dois elementos abaixo da sua coluna:

$$\begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow -3L_1 + L_2\\ L_3 \longrightarrow \quad L_1 + L_3\end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 5 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 2 & 3 & 0\end{array}\right].$$

Agora, consideraremos o pivô da segunda linha, ou seja, o número -4, para zerar o elemento que está abaixo dele em sua coluna. Vejamos:

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \longrightarrow -L_2 + 4L_3\end{array}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & 5 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 14 & 1\end{array}\right].$$

A matriz obtida já está na forma escalonada e seu sistema associado é

$$S':\begin{cases} x + y - z + w = 1 \quad (C)\\ \quad - 4y + 5z - 2w = -1 \quad (B)\\ \quad\quad 3z + 14w = 1 \quad (A)\end{cases}.$$

Além disso, a única coluna da matriz escalonada que não apresenta um pivô é a relativa à variável w, e por isso, ela pode ser considerada como ***variável livre***, isto é, pode assumir valores arbitrários.

Tomando $w = \alpha \in \mathbb{R}$ a Eq. (A) pode ser reescrita como $3z = 1 - 14\alpha$, o que leva

$$z = \frac{1-14\alpha}{3} \tag{8.1}$$

Levando a Equação (8.1) na Equação (B) vem que $-4y + 5\cdot\frac{1-14\alpha}{3} - 2\alpha = -1$, que leva a

$$y = \frac{2-19\alpha}{3} \tag{8.2}$$

Para finalizar a obtenção das variáveis, basta levar as Equações (8.1) e (8.2) na Equação (C), obtendo que

$$x = \frac{2+2\alpha}{3}.$$

Portanto, a solução geral X do sistema S é dada por

$$X = \left\{(x,\ y,\ z,\ w) = \left(\frac{2+2\alpha}{3},\ \frac{2-19\alpha}{3},\ \frac{1-14\alpha}{3},\ \alpha\right);\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$

Como para cada valor de α tem-se uma solução para o sistema S, segue que ele possui infinitas soluções. Logo, ele é classificado como ***possível e indeterminado***.

Observação 8.4 *Em todo sistema cuja matriz escalonada apresentar alguma coluna cuja variável envolvida não estiver com pivôs, significará que essas variáveis podem ser consideradas como* ***variáveis livres****. Vejamos mais um exemplo, já considerando a matriz na forma escalonada:*

Exemplo 8.15 *Considere a matriz escalonada de um sistema S nas variáveis x, y, z e w, nessa ordem, e o sistema S' associado a essa matriz.*

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & -3 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad S' : \begin{cases} -x-3y \qquad\quad -2w & = \quad 5 \quad (A) \\ \qquad\qquad -2z+6w & = \ -4 \quad (B) \end{cases}.$$

Observe que as colunas que não possuem pivô associado são as das variáveis y e w. Logo, são essas que consideraremos como variáveis livres. Sejam, então, $y = \alpha$ e $w = \beta$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Levando $w = \beta$ na Eq. (B) tem-se que

$$z = 2 + 3\beta.$$

Agora, levando $y = \alpha$ e $w = \beta$ na Eq. (A), obtém-se que

$$x = -5 - 3\alpha - 2\beta.$$

Sendo assim, como S' é equivalente a S, tem-se que a solução geral do sistema S é o conjunto X dado por

$$X = \{(x,\ y,\ z,\ w) = (-5-3\alpha-2\beta,\ \alpha,\ 2+3\beta,\ \beta);\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Além disso, pelo mesmo motivo do Exemplo 8.14, segue que S é um sistema ***possível e indeterminado****.*

O método de Gauss-Jordan

O método de resolução de Gauss-Jordan para sistemas lineares consiste na aplicação de operações elementares na matriz aumentada do sistema até que ele fique na forma ***escalonada reduzida***, permitindo que o sistema associado seja de resolução direta ou quase direta. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 8.16 *Utilizando o método de Gauss-Jordan, resolva o sistema S e apresente a sua classificação.*

$$S : \begin{cases} \qquad -\ y + z = 2 \\ -x + 3y \qquad = 5 \\ 2x \qquad + 6z = 20 \end{cases}$$

Resolução: A matriz aumentada de S é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 6 & 20 \end{array}\right]$$

Observe que é possível se ter um pivô na primeira posição da primeira linha, desde que troquemos as linhas L_1 e L_2 e após isso, multipliquemos a linha L_1 por -1. Vejamos:

$$L_1 \longleftrightarrow L_2 \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 & 20 \end{array}\right] \qquad L_1 \longrightarrow -L_1 \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 6 & 20 \end{array}\right]$$

Agora, deve-se usar o pivô (*que é o número 1, localizado na primeira linha e na primeira coluna da última matriz*) para zerar todos os elementos da sua coluna. Isso pode ser feito da forma:

$$L_3 \longleftrightarrow -2L_1 + L_3 \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & 30 \end{array}\right]$$

Para que apareça o pivô na segunda linha, basta multiplicarmos a L_2 da última matriz por -1.

$$L_2 \longrightarrow -L_2 \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 6 & 30 \end{array}\right]$$

Usando o pivô da linha L_2 para zerar os outros elementos da sua coluna, obtém-se:

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow \ \ 3L_2 + L_1 \\ \\ L_3 \longrightarrow -6L_2 + L_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 42 \end{array}\right]$$

Para conseguir o pivô na terceira linha da última matriz obtida, basta substituir a linha L_3 por ela mesma multiplicada por $1/12$. Vejamos:

$$L_3 \longrightarrow \frac{1}{12}L_3 \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 \end{array}\right]$$

Para finalizar, basta apenas zerar todos os dois números acima do pivô obtido. Fazendo isso, obtém-se a matriz:

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow 3L_3 + L_1 \\ L_2 \longrightarrow \ \ L_3 + L_2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/2 \end{array}\right]$$

A matriz resultante das operações elementares está claramente na forma escalonada reduzida. O sistema S' associado a ela é:

$$S' : \left\{ \begin{array}{rrrcr} x & & & = & -1/2 \\ & y & & = & 3/2 \\ & & z & = & 7/2 \end{array} \right. .$$

Sendo assim, a solução geral do sistema S é única e dada por $\alpha = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$, o que implica que ele é classificado como ***possível e determinado***.

Exemplo 8.17 *Considere uma livraria e três de seus clientes C_1, C_2 e C_3, cujos valores pagos em compras feitas foram de, respectivamente, R$ 39,00; R$ 227,00 e R$ 315,00. Esses clientes são amigos e precisam lembrar do preço unitário dos produtos que compraram, contudo, perderam as notas fiscais das compras e não conseguiram entrar em contato com a livraria. Sabe-se que o cliente C_1 comprou apenas um livro, uma borracha e um grampeador. O cliente C_2 comprou 7 livros, 5 borrachas e um grampeador. Finalmente, o cliente C_3 comprou 10 livros, 4 borrachas e apenas um grampeador.*

a) Monte um sistema linear que represente o consumo de cada cliente.

b) *Usando o método de Gauss-Jordan, obtenha o valor unitário do livro, da borracha e do grampeador.*

c) *Esse sistema pode ser classificado como possível e indeterminado? Justifique.*

Resolução:

a) Nesse problema prático, devemos associar uma variável (ou incógnita) para representar cada tipo de produto comprado. Façamos a seguinte associação:

$$l = livro, \quad b = borracha \quad \text{e} \quad g = grampeador.$$

Então, os valores totais pagos por cada cliente podem ser representados por:

$$C_1:\ l+b+g=39 \qquad C_2:\ 7l+5b+g=227 \qquad C_3:\ 10l+4b+g=315$$

Portanto, o sistema procurado é

$$S:\left\{\begin{array}{rcrcrcr} l & + & b & + & g & = & 39 \\ 7l & + & 5b & + & g & = & 227 \\ 10l & + & 4b & + & g & = & 315 \end{array}\right. .$$

b) Para se obter o valor unitário de cada produto comprado basta descobrir os valores de l, b e g. Para isso, vamos resolver o sistema S pelo método solicitado, Gauss-Jordan.

A matriz aumentada do sistema S é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 39 \\ 7 & 5 & 1 & 227 \\ 10 & 4 & 1 & 315 \end{array}\right]$$

Vamos aplicar operações elementares nas linhas dessa matriz até que ela fique na forma escalonada reduzida. Vejamos:

$$\begin{array}{l} L_2 \longrightarrow -7L_1+L_2 \\ L_3 \longrightarrow -10L_1+L_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 39 \\ 0 & -2 & -6 & -46 \\ 0 & -6 & -9 & -75 \end{array}\right] \quad L_2 \longrightarrow -\frac{1}{2}L_2 \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 39 \\ 0 & 1 & 3 & 23 \\ 0 & -6 & -9 & -75 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow -L_2+L_1 \\ \\ L_3 \longrightarrow 6L_2+L_3 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & 9 & 63 \end{array}\right] \quad L_3 \longrightarrow \frac{1}{9}L_3 \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

Agora, basta utilizar o pivô da linha L_3 para zerar os elementos acima dele. Com isso, obtém-se a matriz aumentada na forma escalonada reduzida e, consequentemente, o seu sistema associado S', equivalente ao sistema original, S.

$$\begin{array}{l} L_1 \longrightarrow 2L_3+L_1 \\ L_2 \longrightarrow -3L_3+L_2 \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right] \qquad S':\left\{\begin{array}{ccccr} l & & & = & 30 \\ & b & & = & 2 \\ & & g & = & 7 \end{array}\right. .$$

Então, a solução geral do sistema S é $\alpha = (30,\ 2,\ 7)$, ou seja, o preço unitário do livro comprado é R$ 30,00, da borracha é R$ 2,00 e do grampeador é R$ 7,00.

c) É fácil ver que o sistema S NÃO pode ser classificado como possível e indeterminado, pois foi constatado no item b) que ele possui solução única. Logo ele é ***possível e determinado***.

8.6 Sistemas lineares homogêneos

Quando $b_i = 0 \ \ \forall\ 1 \le i \le m$ no sistema linear genérico expresso pela Definição 8.3, diremos ele é ***Homogêneo***. Isto é, um sistema linear será denominado homogênio quando puder ser escrito na forma

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right. \tag{8.3}$$

Sendo assim, a representação matricial do sistema (8.3) é $AX = \bar{0}$. Além disso, percebe-se facilmente que se $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, a n-upla $(0, 0, \ldots, 0)$ é solução desse sistema, denominada ***solução trivial***.

Portanto, fica claro que um sistema linear homogêneo sempre possui solução. Sendo assim, ele só pode ser classificado como ***possível e determinado*** ou ***possível e indeterminado***, ou seja, ou um sistema homogêneo tem apenas uma solução (a trivial) ou possui infinitas soluções.

O fato de a coluna dos termos independentes do sistema (8.3) ser nula implica que, ao serem realizadas operações elementares na sua matriz aumentada, essa coluna não será alterada. Portanto, pode-se apresentar a Observação 8.5.

Observação 8.5 *Para resolver um sistema linear homogêneo por escalonamento, basta escalonarmos a matriz A do sistema, desde que, ao se escrever o sistema linear associado à matriz escalonada, se considere novamente a coluna de zeros.*

Exemplo 8.18 *Dado o sistema* $T : \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ -x & & & + & z & = & 0 \\ x & - & 3y & + & 6z & = & 0 \end{array} \right.$*, use o método de Gauss-Jordan para obter o seu conjunto solução.*

Resolução: A matriz do sistema é $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$. Realizando operações elementares obtém-se:

$$L_1 \longrightarrow \frac{1}{2}L_1 \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow \ \ L_1 + L_2 \\ L_3 \longrightarrow -L_1 + L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 0 & -1/2 & 3 \\ 0 & -5/2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \longrightarrow -2L_2 \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & -5/2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow (1/2)L_2 + L_1 \\ \\ L_3 \longrightarrow (5/2)L_2 + L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \longrightarrow (1/11)L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \longrightarrow \ \ L_3 + L_1 \\ L_2 \longrightarrow 6L_3 + L_2 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O sistema associado à matriz escalonada é: $\begin{cases} x & & & = & 0 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 0 \end{cases}$, o que prova que o sistema T possui apenas a solução trivial, e portanto, seu conjunto solução é $\{(0,\ 0,\ 0)\}$.

8.7 Exercícios

1. Escreva os sistemas abaixo nas suas respectivas formas matriciais, considerando que todas as letras apresentadas nos sistemas representam variáveis.

a) $A: \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 7y - 4z = 11 \\ -\frac{x}{2} + y - z = -2 \end{cases}$

b) $B: \begin{cases} 2l + 4m + 3n - 5p = 7 \\ 3l - 7m - n + 2p = -4 \\ m + n + p = 0 \end{cases}$

c) $C: \begin{cases} -w + 3x - 3y + t = 9 \\ 7w - 2x + 4y = -3 \end{cases}$

2. Verifique se $\alpha = \left(-1,\ \frac{2}{3},\ 4\right)$ é solução de algum dos sistemas abaixo:

a) $A: \begin{cases} x - 2y + \frac{1}{2}z = -1/3 \\ -x - 3y - z = -5 \\ 5x + 4y - 2z = 3 \end{cases}$

b) $B: \begin{cases} 3x - y + \frac{2}{5}z = -31/15 \\ -2x - y - z = -8/3 \end{cases}$

3. (UFMG) Seja $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ um polinômio em que a e b são números inteiros. Sabe-se que $1 + \sqrt{2}$ é uma raiz de $p(x)$. Considerando essas informações, **DETERMINE** os coeficientes a e b.

4. Resolva os sistemas a seguir pelo método de substituição.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ -x + 4y = \frac{23}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} -7x + y = 15 \\ \frac{x}{2} - 2y = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - \frac{y}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$

5. Utilizando o método de Gauss obtenha as soluções dos sistemas abaixo e, em seguida, classifique-os:

a) $A: \begin{cases} 3x - 7y + 4z = -1 \\ x + 2y - 3z = 4 \\ y + z = -1 \end{cases}$

b) $B: \begin{cases} 3x - 3y + \frac{1}{2}z = -3 \\ -2x + y - z = 4 \\ x + 3y + 2z = -17/3 \end{cases}$

c) $C: \begin{cases} 9t - 2u - 7v = 25 \\ 5t + 3u - 11v = 13 \\ 4t - 5u + 4v = 18 \end{cases}$

d) $D:\begin{cases} -2x + 2y - 4z = 2 \\ 2x - y + 3t = 2 \\ x - 2y + z - 2t = 0 \end{cases}$

e) $E:\begin{cases} -2x + y - z = 1 \\ -y + 2z + 3t = 2 \\ x - 2y + z - 2t = -1 \end{cases}$

f) $F:\begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases}$

6. Utilizando o método de Gauss-Jordan obtenha as soluções dos sistemas abaixo e, em seguida, classifique-os:

a) $I:\begin{cases} u - 2v - 3w = 5 \\ -2u + 5v + 2w = 3 \\ -u + 3v - w = 2 \\ u - v + w = 0 \end{cases}$

b) $J:\begin{cases} x + y + z + t - 3w = 7 \\ x - y + z + t + 2w = -5 \\ y - z + 2t - w = 4 \\ 2x + z - t + \frac{1}{2}w = -2 \end{cases}$

c) $K:\begin{cases} 7x - 3y + 2z - t = 4 \\ -x + 5y - 6z + 2t = -1 \end{cases}$

d) $L:\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - 2y = -1 \\ 2x - 3y = -4 \\ x - y + z = 6 \\ y - z = -5 \end{cases}$

e) $M:\begin{cases} -u + 2v - 4w = 4 \\ 7u - 3v + w = -39/2 \\ 3w + 3v + w = 1/2 \end{cases}$

7. (UFJF) Em uma vídeo locadora, o acervo de filmes foi dividido, quanto ao preço, em três categorias: Série Ouro (SO), Série Prata (SP) e Série Bronze (SB). Marcelo estava fazendo sua ficha de inscrição, quando viu Paulo alugar dois filmes SO, dois filmes SP e um filme SB e pagar R$ 13,50 pela locação dos filmes. Viu também Marcos alugar quatro filmes SO, dois filmes SP e um filme SB e pagar R$ 20,50 pela locação dos filmes. Marcelo alugou três filmes SO, um filme SP e dois filmes SB e pagou R$ 16,00. Então, nesta locadora, o preço da locação de três filmes, um de cada categoria, é igual a:

a) R$ 7,50 b) R$ 8,00 c) R$ 9,00 d) R$ 10,00

8. (UNESP) A agência Vivatur vendeu a um turista uma passagem que foi paga, à vista, com cédulas de 10, 50 e 100 dólares, num total de 45 cédulas. O valor da passagem foi 1.950 dólares e a quantidade de cédulas recebidas de 10 dólares foi o dobro das de 100. O valor, em dólares, recebido em notas de 100 pela agência na venda dessa passagem, foi:

a) 1.800 b) 1.500 c) 1.400 d) 1.000 e) 800

9. (ULBRA) Determinando os valores de a e b, a fim de que o sistema

$$\begin{cases} 2x + 2y = b \\ 2x + ay = 6 \end{cases}$$

seja indeterminado, o produto ab é:

a) 36 b) 24 c) 18 d) 12 e) 6

10. (FGVRJ) Se $5x+7y+2z=33$ e $2x+3y+z=12$, então $x+y$ é igual a:

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

11. (Fuvest - SP) Calcule a e b para que o sistema linear

$$\begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = b \end{cases}$$

não admita solução.

12. (Unicamp) Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ x + 2y + z + w = 2 \\ x + y + 2z + w = 3 \\ x + y + z + 2w = 4 \end{cases}$$

13. (UFMG) Determine o valor de k para que o sistema abaixo admita solução:

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}$$

14. (FGV) Resolvendo $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = 1 \\ 6y + 3z = -12 \end{cases}$, obtém-se para z o valor:

a) -3 b) -2 c) 0 d) 2 e) 3

15. (Mauá) Para que valores de k o sistema abaixo é possível e determinado?

$$\begin{cases} kx + 3y = 2 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

16. (Fuvest - *modificada*) Considere o sistema linear nas incógnitas x, y, z e w:

$$\begin{cases} 2x + my = -2 \\ x + y = -1 \\ y + (m+1)z + 2w = 2 \\ z - w = 1 \end{cases}$$

a) Para que valores de m, o sistema tem uma única solução?
b) Para que valores de m, o sistema não tem solução?
c) Para $m=1$, calcule o valor de $2x+y–z–2w$.

17. (Fuvest) O sistema $\begin{cases} x + (c+1)y = 0 \\ cx + y = -1 \end{cases}$, onde $c \neq 0$, admite uma solução $(x,\ y)$ com $x = 1$. Então, o valor de c é:

    a) -3 b) -2 c) -1 d) 1 e) 2

18. (IBMEC) Considere o sistema linear $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = -3 \\ kx + ky = 20 \end{cases}$. Para que o sistema seja possível devemos ter:

    a) $k = 4$ b) $k = 3$ c) $k = 2$ d) $k = 1$ e) $k = 0$

19. (FGV) Mostre que existem infinitas triplas ordenadas $(x,\ y,\ z)$ de números que satisfazem a equação matricial:

$$x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -10 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

20. Seja o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = \beta^2 - 16 \\ 2x - y = \beta + 4 \end{cases}$. Calcule β de forma que ele seja homogêneo.

21. Usando a matriz escalonada (ou escalonada reduzida), obtenha a solução dos sistemas homogêneos:

    a) $I: \begin{cases} u + v - 10w = 0 \\ u - 5w = 0 \\ v - 3w = 0 \end{cases}$ b) $J: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$

22. Pode-se afirmar que o sistema $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ é possível e indeterminado? Justifique.

23. Mostre que o sistema $\begin{cases} x + y + 2z + w = 0 \\ -x + y + 2w = 0 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$ é possível e indeterminado, sendo que suas soluções são da forma $\alpha = \left(\frac{19}{10}\lambda,\ -\frac{\lambda}{10},\ -\frac{7}{5}\lambda,\ \lambda\right)$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$.

24. (SpeedSoft) Numa sala, as cadeiras têm 4 pernas e os banquinhos, têm 3. O total de assentos é 10 e o total de pernas é 34. Quantas cadeiras têm nessa sala?

25. Se o polinômio $P(x) = (2m + 3n - p)x^2 + (m + n - 5p)x + (p - 2)$ é identicamente nulo, a soma $m + n + p$ é igual a:

    a) -3 b) -6 c) 8 d) 5 e) 12

26. (FGV) Num escritório há 3 impressoras: A, B e C. Em um período de 1 hora:

    - A e B juntas imprimem 150 folhas;
    - A e C juntas imprimem 160 folhas;
    - B e C juntas imprimem 170 folhas.

Em 1 hora, a impressora A imprime sozinha:

a) 60 folhas b) 65 folhas c) 75 folhas d) 70 folhas e) 80 folhas

27. (Mack) Um supermercado vende três marcas diferentes A, B e C de sabão em pó, embalados em caixas de 1kg. O preço da marca A é igual à metade da soma dos preços das marcas B e C. Se uma cliente paga R$14,00 pela compra de dois pacotes do sabão A, mais um pacote do sabão B e mais um do sabão C, o preço que ela pagaria por três pacotes do sabão A seria:

a) R$ 12,00 b) R$ 10,50 c) R$ 13,50 d) R$ 11,50 e) R$ 13,00

28. (UFC) Se um comerciante misturar 2 kg de café em pó do tipo I com 3 kg de café em pó do tipo II, ele obtém um tipo de café cujo preço é R$ 4,80 o quilograma. Mas, se misturar 3 kg de café em pó do tipo I com 2 kg de café do tipo II, a nova mistura custará R$ 5,20 o quilograma. Os preços do quilograma do café do tipo I e do quilograma do café do tipo II são respectivamente:

a) R$ 5,00 e R$ 3,00 b) R$ 6,40 e R$ 4,30 c) R$ 5,50 e R$ 4,00
d) R$ 5,30 e R$ 4,50 e) R$ 6,00 e R$ 4,00

29. (VUNESP) Uma pessoa consumiu na segunda-feira, no café da manhã, 1 pedaço de bolo e 3 pãezinhos, o que deu um total de 140 gramas. Na terça-feira, no café da manhã, consumiu 3 pedaços de bolo e 2 pãezinhos (iguais aos do dia anterior e de mesma massa), totalizando 210 gramas. A tabela seguinte fornece (aproximadamente) a quantidade de energia em quilocalorias (kcal) contida em cada 100 gramas do bolo e do pãozinho.

Alimento	**Energia**
100g bolo	420kcal
100g pãozinho	270kcal

Após determinar a quantidade em gramas de cada pedaço de bolo e de cada pãozinho, use a tabela e calcule o total de quilocalorias (kcal) consumido pela pessoa, com esses dois alimentos, no café da manhã de segunda-feira.

30. (UFSCar) Uma loja vende três tipos de lâmpada (x, y e z). Ana comprou 3 lâmpadas tipo x, 7 tipo y e 1 tipo z, pagando R$ 42,10 pela compra. Beto comprou 4 lâmpadas tipo x, 10 tipo y e 1 tipo z, o que totalizou R$ 47,30. Nas condições dadas, a compra de três lâmpadas, sendo uma de cada tipo, custa nessa loja:

a) R$ 30,50 b) R$ 31,40 c) R$ 31,70 d) R$ 32,30 e) R$ 33,20

31. (Fuvest) Um supermercado adquiriu detergentes nos aromas limão e coco. A compra foi entregue, embalada em 10 caixas, com 24 frascos em cada caixa. Sabendo-se que cada caixa continha 2 frascos de detergentes a mais no aroma limão do que no aroma coco, o número de frascos entregues, no aroma limão, foi:

a) 110 b) 120 c) 130 d) 140 e) 150

CAPÍTULO 9

Determinante e a Matriz inversa

9.1 Determinante

Definição 9.1 *Define-se o determinante de uma matriz quadrada A como o número que se pode obter operando com seus elementos seguindo uma regra fixa. Suas notações mais usuais são:* $det(A)$ *e* $|A|$. *Para matrizes de ordem* ≤ 3 *ele é obtido da seguinte forma:*

1. Se A tem ordem 1, então $A = [a_{11}] \Rightarrow det(A) = a_{11}$.

2. Se A tem ordem 2, então $det(A)$ é definido como a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal pelo produto dos elementos da diagonal secundária, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. Se A tem ordem 3, ou seja, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, tem-se que:

$$det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Exemplo 9.1 *Obtenha o determinante de cada matriz:*

$$A = [-12]\,,\ B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 6 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1/3 & 9 \\ 5 & -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Resolução: De acordo com a Definição 9.1 pode-se obter o determinante de cada uma das três matrizes facilmente.

- Como o único elemento da matriz A é o número -12, segue que $det(A) = -12$.

- Para a matriz B tem-se que $det(B) = -4 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 6 \Longrightarrow det(B) = -20$.

- Para a matriz C vale que

$$\begin{aligned} det(C) &= 0\cdot\frac{1}{3}\cdot 3+2\cdot 9\cdot 5+(-1)\cdot 4\cdot(-6)-(-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot 5-0\cdot 9\cdot(-6)-2\cdot 4\cdot 3 \\ &= 90+24+\frac{5}{3}-24 \\ &= \frac{275}{3} \end{aligned}$$

Uma forma muito prática de se calcular o determinante de uma matriz de ordem 3, sem ter que se lembrar da extensa expressão apresentada na Definição 9.1, é apresentada na próxima seção.

9.2 Regra de Sarrus

A expressão para o determinante de uma matriz de ordem 3 também pode ser obtida ao se utilizar a **Regra de Sarrus**[i]. Essa regra consiste em seguir os 7 passos descritos a seguir:

1. replicar as duas primeiras colunas da matriz à direita do determinante;
2. multiplicar os elementos da diagonal principal;
3. multiplicar os elementos de cada uma das duas diagonais paralelas à principal;
4. multiplicar os elementos da diagonal secundária;
5. multiplicar os elementos de cada uma das duas diagonais paralelas à secundária;
6. efetuar o somatório dos resultados obtidos nos itens 2 e 3;
7. do resultado obtido no item 6 subtrair os resultados obtidos em 4 e 5.

A seguência de passos da regra de Sarrus é geralmente representada pelo esquema descrito na Figura 6.

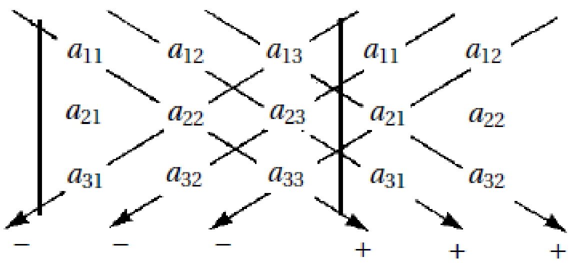


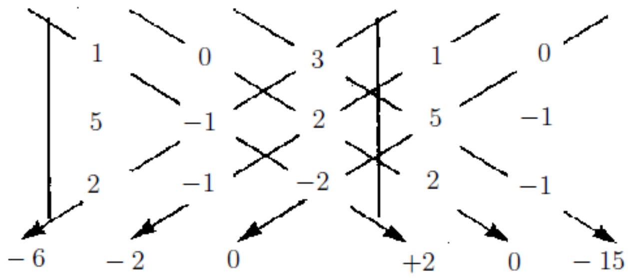
Figura 6 – Representação da Regra de Sarrus.

A partir do esquema descrito na Figura 6 e seguindo os passos apresentados, observe que chega-se à fórmula indicada na definição de determinante de uma matriz de ordem 3. Vejamos um exemplo numérico da utilização desse método.

i Pierre Frédéric Sarrus foi um matemático francês, nascido em 10 de março de 1798 e cuja morte data de 20 de novembro de 1861. Sarrus foi premiado pela Academia Francesa de Ciências, pela autoria de estudos em integrais múltiplas. Ele também descobriu a regra *mnemônica* descrita na definição de determinante de uma matriz 3×3, que leva seu nome.

Exemplo 9.2 *Obtenha* $|T|$ *sabendo que* $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.

Resolução: Como a matriz T é de ordem 3, pode-se utilizar a Regra de Sarrus. Replicando as duas primeiras colunas ao lado da representação de $|T|$ vem que:



Então,

$$|T| = 2 + 0 + (-15) - (-6) - (-2) - 0 \Longrightarrow |T| = -5.$$

A Definição 9.1 engloba determinantes de matrizes de ordem ≤ 3. Para os casos onde as ordens podem ser maiores, é necessário o entendimento de outras definições que auxiliam na construção do determinante.

9.3 Teorema Fundamental de Laplace

Nesse texto, utilizaremos uma das formas de se definir determinantes para matrizes de ordem $n \geq 2$, que é o Teorema Fundamental de Laplace. Antes disso, alguns novos conceitos e definições serão importantes. Vejamos:

Definição 9.2 *Seja* M *uma matriz de ordem* $n \geq 2$, *e seja* a_{ij} *um elemento de* M. *Define-se o menor complementar desse elemento, e indica-se por* D_{ij}, *o determinante da matriz obtida ao se retirar a linha* i *e a coluna* j *de* M.

Exemplo 9.3 *Para* $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, *obtenha os menores complementares* D_{11} *e* D_{32}.

Resolução: Pela Definição 9.2, observe que D_{11} é o determinante da matriz obtida ao se retirar a primeira linha e a primeira coluna de M. Da mesma forma, D_{32} é o determinante da matriz encontrada ao se retirar a terceira linha e a segunda coluna de M. Então, vem que:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) - 2 \cdot (-1) = 2 + 2 = 4.$$

$$D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = 2 - 15 = -13.$$

Definição 9.3 *Seja M uma matriz de ordem $n \geq 2$, e seja a_{ij} um elemento de M. Define-se o cofator de a_{ij} (ou complementar algébrico desse elemento), e indica-se por A_{ij}, como sendo o número*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}.$$

Exemplo 9.4 *Observe que A_{11} e A_{32} para a matriz M do Exemplo 9.3 são:*

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = 1 \cdot 4 = 4 \quad \text{e} \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot D_{32} = -1 \cdot (-13) = 13.$$

Admitiremos aqui a utilização do **Teorema Fundamental de Laplace**. Sua demonstração não será apresentada pois está além da teoria estudada nesse material. Alunos interessados em estudá-la, podem consultar [27, p. 60; 28, p. 127; 29, p. 252].

Teorema 9.1 (Teorema Fundamental de Laplace) *O determinante de uma matriz M, de ordem $n \geq 2$, é a soma dos produtos dos elementos de uma linha qualquer (ou coluna) pelos respectivos cofatores.*

Vamos entender, de forma clara, o que diz o Teorema 9.1. Para isso, vamos considerar cada um dos dois casos possíveis: escolher uma coluna ou uma linha.

1. Imagine que se escolha a **coluna** j da matriz M, conforme destaque na figura abaixo:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   Observe que cada um dos elementos dessa coluna $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ determina um cofator associado $(A_{1j}, A_{2j}, \ldots, A_{nj})$. O que o Teorema 9.1 garante é que

$$det(M) = |M| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}.$$

2. Imagine que se escolha a **linha** i da matriz M, em destaque na figura a seguir:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Assim como no caso anterior, cada um dos elementos dessa linha determina um cofator associado. Para esse caso, o Teorema 9.1 garante que

$$det(M) = |M| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Observação 9.1 *Por esse método percebe-se que o ideal, quando possível, é escolher uma linha (ou coluna) que tiver a maior quantidade de zeros.*

Exemplo 9.5 *Calcule o determinante da matriz abaixo utilizando o Teorema 9.1, escolhendo uma das linhas e depois uma das colunas.*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução: (**Escolhendo uma linha**) Por conveniência, vamos escolher a linha que possuir a maior quantidade de zeros, ou seja, a primeira ou a segunda linha. Consideremos a segunda linha. Então, pelo Teorema 9.1 vem que:

$$det(B) = |B| = 3 \cdot A_{21} + \underbrace{0 \cdot A_{22}}_{0} + \underbrace{0 \cdot A_{23}}_{0} + 2 \cdot A_{24} \Longrightarrow det(B) = 3 \cdot A_{21} + 2 \cdot A_{24}.$$

Observe que

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot D_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 81 = -81.$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4} \cdot D_{24} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-9) = -9.$$

Então, $det(B) = 3 \cdot (-81) + 2 \cdot (-9)$, ou seja:

$$det(B) = -261.$$

(**Escolhendo uma coluna:**) A coluna com maior número de zeros é a terceira. Portanto, vamos tomá-la como referência para a utilização do Teorema 9.1, que garante que

$$det(B) = |B| = \underbrace{0 \cdot A_{13}}_{0} + \underbrace{0 \cdot A_{23}}_{0} + 3 \cdot A_{33} + \underbrace{0 \cdot A_{44}}_{0} \Longrightarrow det(B) = 3 \cdot A_{33}$$

$$\Longrightarrow det(B) = 3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-87)$$

$$\therefore \; det(B) = -261.$$

Sendo assim, como já sabíamos que deveria acontecer, pois é garantiro pelo Teorema 9.1, os resultados obtidos são iguais, independente de escolhermos uma linha qualquer ou uma coluna.

Propriedades 9.1 (Propriedades do Determinante) *Segue do Teorema 9.1 e da Definição 9.1 um conjunto de propridades do determinante. Considerando duas matrizes A e B, ambas de ordem n, as principais propriedades são:*

1. Se todos os elementos de uma linha (ou coluna) de A forem nulos, $det(A) = 0$.
2. $det(A) = det\left(A^t\right)$.
3. Se multiplicarmos uma linha da matriz por uma constante, o determinante fica multiplicado por essa constante.
4. Ao se trocar a posição de duas linhas de uma matriz, o determinante troca de sinal.
5. Se A possuir duas linhas (ou colunas) iguais, $det(A) = 0$.
6. $det(AB) = det(A) \cdot det(B)$.

Observação 9.2 *Use o Exercício 3 para perceber a validade das propriedades descritas na Proposição 9.1.*

9.4 Matriz inversa

Definição 9.4 *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$, diremos que A é **inversível** e que B é sua inversa, também denotada por A^{-1}. Se A não for inversível, diremos que ela é **singular**.*

Teorema 9.2 *Se A é inversível, sua inversa A^{-1} é única.*

Demonstração: Como A^{-1} é inversa de A, segue que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Suponha que exista outra matriz, B, que também seja inversa de A, isto é, $AB = BA = I_n$. Então,

$$B = I_n B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}I_n = A^{-1}.$$

■

Exemplo 9.6

1. Mostre que $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ é a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$.

   Resolução: Para mostrar o que se pede, basta observar que $AB = I_2$. De fato,

   $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 7 + 3\cdot(-2) & 1\cdot(-3) + 3\cdot 1 \\ 2\cdot 7 + 7\cdot(-2) & 2\cdot(-3) + 7\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

   Como $AB = I_2$, segue que $B = A^{-1}$ é a inversa de A.

2. Mostre que se a matriz A possui inversa, então A^{-1} tem a mesma ordem de A.

   Resolução: Como por hipótese A possui inversa, significa que a matriz A é quadrada de ordem n. Seja agora, a sua inversa A^{-1} de ordem $r \times t$. Então, $AA^{-1} = I_n$, o que implica que o número de colunas de A tem que ser igual ao número de linhas de A^{-1}, ou seja, $n = r$. Além disso, também se tem que $A^{-1}A = I_n$, ou seja, o número de colunas de A^{-1} tem que ser igual ao número de linhas de A, isto é, $t = n$. Portanto, A^{-1} tem ordem n.

3. Determine a inversa de $M = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$.

   Resolução: Como M tem ordem 2, segue que M^{-1} terá ordem 2. Então, a forma genérica dessa inversa é
$$M^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$
   Deve-se ter que $MM^{-1} = I_2$. Logo,
$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a+7c & 3b+7d \\ 5a+11c & 5b+11d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   Pela igualdade de matrizes segue que
$$\begin{cases} 3a+7c &= 1 \quad (1) \\ 5a+11c &= 0 \quad (2) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 3b+7d &= 0 \\ 5b+11d &= 1 \end{cases}$$
   Da Eq. (2) do primeiro sistema vem que
$$a = -\frac{11}{5}c \quad (*)$$
   Levando a Eq. $(*)$ na Eq. (1) desse sistema obtém-se
$$3 \cdot \left(-\frac{11}{5}c\right) + 7c = 1 \Rightarrow \frac{-33c+35c}{5} = 1 \Rightarrow \frac{2c}{5} = 1 \Rightarrow c = \frac{5}{2}.$$
   Substituindo o valor encontrado para c na Eq. $(*)$ chega-se à conclusão que
$$a = -\frac{11}{2}.$$
   Resolvendo-se o segundo sistema chega-se à conclusão de que
$$b = \frac{7}{2} \text{ e } d = -\frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} -11/2 & 7/2 \\ 5/2 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

O Teorema 9.3 garante que dada uma matriz quadrada A, se existir uma matriz B tal que $AB = I$, necessariamente acontecerá que $BA = I$, e portanto, basta que uma dessas condições seja verificada para garantir que B é a inversa de A.

Teorema 9.3 *Sejam A e B matrizes de ordem n. Então, $AB = I_n$ se, e somente se, $BA = I_n$.*

A demonstração desse teorema será omitida nesse texto por estar além do seu escopo. Contudo, alunos interessados podem pesquisá-la nas referências [28, p. 74; 30, p. 75, 85].

Teorema 9.4 *Sejam A e B matrizes inversíveis e de mesma ordem. Então, AB é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Demonstração: Por hipótese A e B são inversíveis e de mesma ordem, digamos n. Logo, existem A^{-1} e B^{-1}, ambas de ordem n. Então, multiplicando AB por $B^{-1}A^{-1}$ obtém-se que:
$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n = \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB).$$
Portanto, a inversa de AB existe e é igual a $B^{-1}A^{-1}$. ∎

Observação 9.3 *Na Definição 9.4 ficou claro que nem toda matriz possui inversa. Um exemplo desse tipo de matriz é* $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. *De fato, considere que exista* $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *tal que* $AB = I_2$, *ou seja,*

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Isso implica que $a = 1/3$ *e* $a = 0$ *simultaneamente, o que é um* ***absurdo***, *e mostra que é impossível que exista a matriz* $B = A^{-1}$. *Portanto,* A *é uma matriz* ***singular***.

Então, será que existe uma condição que garanta quando uma matriz quadrada A irá possuir inversa? A resposta para essa pergunta é sim e é dada pelo Teorema 9.5, cuja demonstração completa pode ser obtida em nossas referências [28, p. 109; 31, p. 176].

Teorema 9.5 *Uma matriz* A *de ordem* n *admite inversa se, e somente se,* $det(A) \neq 0$.

Demonstração: Aqui, vamos demonstrar apenas a "*ida*", ou seja: Se A admite inversa, então $det(A) \neq 0$. De fato, como existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = I_n$, pela parte 6 das Propriedades 9.1 segue que:

$$det(AA^{-1}) = det(A) \cdot det\left(A^{-1}\right).$$

Além disso, como $det(I_n) = 1$ (Veja o Exercício 10), segue que

$$det(A) \cdot det\left(A^{-1}\right) = 1. \tag{9.1}$$

Da Equação (9.1) segue diretamente que $det(A) \neq 0$. ■

Observação 9.4 *A Equação (9.1) permite obter outra conclusão muito útil, que é*

$$det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{det(A)},$$

ou seja, o inverso do determinante de uma matriz é igual ao determinante da matriz inversa.

Corolário 9.1 *Considere* A *uma matriz quadrada. Então,* A *é singular se, e somente se,* $det(A) = 0$.

A demonstração da validade do Corolário 9.1 pode ser feita como consequência direta do Teorema 9.5.

Exemplo 9.7 *Para a matriz* M *parte 3 do Exemplo 9.6 tem-se que*

$$det(M) = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} = 3 \cdot 11 - 7 \cdot 5 = 33 - 35 = -2.$$

Portanto, pela Observação 9.4 vem diretamente que

$$det\left(M^{-1}\right) = \frac{1}{det(M)} = -\frac{1}{2}.$$

De fato, observe que

$$det\left(M^{-1}\right) = \left(-\frac{11}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{33}{4} - \frac{35}{4} = -\frac{1}{2}.$$

9.5 Método prático para determinação da inversa

Com base na parte 3 do Exemplo 9.6, onde se usa uma matriz de ordem 2, vimos que uma forma de obter a inversa de uma matriz qualquer, M, de ordem n, é supor a existência de uma matriz M^{-1} genérica, também de ordem n, e forçar para que ocorra $MM^{-1} = I_n$. Com isso, chega-se a um sistema que de n equações e n incógnitas, que ao ser resolvido permite obter os elementos de M^{-1}. Caso esse sistema seja impossível, significará que a matriz M não possui inversa.

Uma forma prática de se obter a inversa de uma matriz A é com a utilização dos resultados garantidos pelo Teorema 9.6. Discussões desses resultados, e também suas demonstrações, podem ser obtidos em livros de Geometria Analítica e também Álgebra Linear [28, 30].

Teorema 9.6 *Seja A uma matriz quadrada. Se apenas com operações elementares com linhas for possível reduzir A até que se obtenha I_n, então A é inversível e A^{-1} é obtida após se aplicar a mesma sequência de operações elementares em I_n.*

Ora, o Teorema 9.6 garante duas coisas:

i. Se de A for possível obter I_n, apenas com operações elementares, então A é inversível.

ii. Se existe A^{-1} ela é obtida aplicando-se em I_n as mesmas operações elementares usadas no item i.

Isso permite concluir que é possível aplicar operações elementares simultaneamente nas matrizes A e I_n, posicionadas da forma

$$[A \mid I_n]\,.$$

Se com isso, for obtido

$$[I_n \mid B]\,,$$

significará que A é inversível e que $A^{-1} = B$.

Caso não seja possível obter I_n a partir de A, significará que A é singular. Vejamos uma aplicação desse método.

Exemplo 9.8 *Mostre que* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ *é inversível e obtenha A^{-1}.*

Resolução: Primeiramente, vamos escrever a matriz A e I_3 na forma $[A \mid I_3]$, obtendo:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo a troca $L_1 \longleftrightarrow L_2$ vem que

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Operando da forma $L_3 \longrightarrow -L_1 + L_3$ chega-se a

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Fazendo $L_1 \longrightarrow -L_2 + L_1$ e $L_3 \longrightarrow -L_2 + L_3$, tem-se que

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Agora, ao se fazer $L_3 \longrightarrow -L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Para finalizar, basta fazer $L_2 \longrightarrow -2L_3 + L_2$, obtendo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Observe que o lado esquerdo, que era onde estavam os elementos da matriz A, foi reduzido à matriz I_3. Isso implica, pelo Teorema 9.6, que A é inversível e que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observe que quando se quer obter a inversa de uma matriz A, caso exista, será geralmente mais prático usar esse método do que primeiro mostrar que $det(A) \neq 0$ para garantir que a inversa exista e, só depois, obter A^{-1}. Isso porque, ao se usar o método, faz-se as duas ações simultaneamente, isto é, ao se mostrar que a inversa existe também se obtém seus elementos.

9.6 Exercícios

1. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$. Obtenha $|A|$:

   a) Pela regra de Sarrus.

   b) Pelo Teorema Fundamental de Laplace, usando a terceira coluna.

2. Determine $|B|$ e $|B^t|$ sendo $B = \begin{bmatrix} -2 & i & 0 \\ -1 & 0 & -3i \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \pi & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Faça o que se pede nos itens abaixo, e indique qual das Propriedades 9.1 está sendo verificada em cada caso.

a) Mostre que $det(A) = det(B) = 0$.

b) Conclua que $det(C) = det\left(C^t\right)$.

c) Multiplique a primeira linha de C por $1/2$ e verifique que o determinante da nova matriz obtida será igual a $\frac{1}{2} \cdot det(C)$.

d) Mostre que $det(C) = -det(D)$.

e) Verifique que $det(E) = 0$.

f) Mostre que $det(CD) = det(C) \cdot det(D)$.

4. Sejam as matrizes $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1/3 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 4 & 1/3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule:

a) $det\,(C + D)$

b) $det\,(C) + det\,(D)$

5. Mostre que a matriz $K = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ é singular.

6. Qual deve ser o valor de β para que a matriz $S = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & \beta & 2 \end{bmatrix}$ seja singular?

7. Mostre que a matriz $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ **não** é singular, sem calcular a sua inversa.

8. Usando o Teorema Fundamental de Laplace, calcule $det(A)$ para:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 & 8 \\ -5 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -6 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 & \sqrt{2} \\ 1 & -2 & 2 & \sqrt{3} \\ 2 & 0 & -i & -1 \\ \pi & 0 & -i & -1 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & i & -2i \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & i \\ 1 & 5 & i & 0 \end{bmatrix}$ f) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$

9. Observe que as matrizes dos itens c) e f) do exercício anterior são triangulares, respectivamente, inferior e superior. Perceba também, que o determinante de cada uma delas é igual ao produto dos elementos da diagonal principal. Isso não é uma coincidência, pois sempre valerá a propriedade a seguir:

Propriedade: Para qualquer matriz triangular A tem-se que $det(A)$ é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal.

Usando o Teorema 9.1 (Teorema Fundamental de Laplace) prove essa propriedade para a matriz triangular inferior genérica, A, de ordem 5.

10. Como consequência do Exercício 9, conclua que $det(I_n) = 1$.

11. Para a matriz N obtenha os cofatores A_{11}, A_{22} e A_{33}. Para a matriz M obtenha A_{13}, A_{21} e A_{32}.

$$N = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

12. Usando o resultado descrito na Observação 9.4, obtenha $det\left(H^{-1}\right)$ sendo

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

13. Seja A uma matriz de ordem n com $det(A) \neq 0$. Mostre que $A^2 = I_n \Longleftrightarrow A = A^{-1}$.

14. Utilizando o método determinado a partir do Teorema 9.6 encontre a inversa de cada matriz, caso ela exista.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e) $E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

15. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Determine $\left(AB^{-1}\right)^t$.

16. (UFBA) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Sabendo-se que X é uma matriz simétrica e que $AX = B$, determine $12y_{11} - 4y_{12}$, sendo $Y = \left(y_{ij}\right) = X^{-1}$.

17. (ITA) Considere P a matriz inversa da matriz M, onde $M = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/7 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule a soma dos elementos da diagonal principal da matriz P.

18. (ITA) Seja a matriz 3×3 dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sabendo-se que B é a inversa de A, calcule a soma dos elementos de B.

19. Determine os possíveis valores de δ para que se tenha $det(A) = 0$.

a) $A = \begin{bmatrix} \delta+2 & \delta \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} \delta & \delta-1 & 3 \\ 0 & 2\delta & 5 \\ \delta & -1 & 0 \end{bmatrix}$

20. (FGV) Considere a equação $det(A - xI_2) = 0$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Calcule a soma das raízes dessa equação.

CAPÍTULO 10

Respostas e dicas dos exercícios

Capítulo 1

1. a) $\sim P : x$ não é múltiplo de 5 ou $(x+4)$ não é múltiplo de 7.

   b) $\sim P$: Henrique não é mineiro ou Mário é bahiano.

   c) $\sim P$: A caneta é azul e o lápis tem ponta.

   d) $\sim P : y$ é um número ímpar e $(y-3)$ é par.

   e) $\sim P$: Existe algum prédio sem janelas.

   f) $\sim P$: A blusa não é azul e o spato não é preto.

   g) $\sim P$: Existe algum número primo par.

   h) $\sim P : x \leq 3$ ou $y > 0$.

   i) $\sim P : x$ é ímpar e y é par.

2. a) (H) p é um número primo. (T) $p \geq 2$.

   b) (H) n objetos colocados em, no máximo, $(n-1)$ gavetas.
   (T) Pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.

   c) (H) Número par maior do que 2. (T) É a soma de dois números primos.

   d) (H) $x^2 + x = 0$. (T) $x_1 = 0$ e $x_2 = -1$.

   e) (H) Cada divisão do plano em regiões não superpostas.
   (T) É sempre possível colorir as regiões usando apenas 4 cores, de forma que regiões com fronteira comum não tenham a mesma cor.

3. a) $Q \Rightarrow P$: Se $x \geq 4$, então x é um número natural e $x^2 = 2$.
   $P \Rightarrow Q$ (F) e $Q \Rightarrow P$ (F)

   b) $Q \Rightarrow P$: Se há sol o céu não está nublado.
   $P \Rightarrow Q$ (F) e $Q \Rightarrow P$ (V)

   c) $Q \Rightarrow P$: Se uma caneta é vermelha, então ela não é azul.
   $P \Rightarrow Q$ (F) e $Q \Rightarrow P$ (V)

   d) $Q \Rightarrow P$: Se x é um múltiplo de 4, então ele é um número par.
   $P \Rightarrow Q$ (F) e $Q \Rightarrow P$ (V)

   e) $Q \Rightarrow P$: Se y é um número inteiro, então ele também é natural.
   $P \Rightarrow Q$ (V) e $Q \Rightarrow P$ (F)

4. a) Condicional: (H) $3+3=5$. e (T) O círculo é um quadrado.

   b) Condicional: (H) x é par. e (T) x^3 é par.

   c) Condicional: (H) um polígono que é um quadrado. e (T) É um retângulo.

   d) Bicondicional: ($\Rightarrow$) Um número qualquer α é racional, então α^2 também é racional.
   ($\Leftarrow$) Se α^2 é racional, então α é racional.

   e) Bicondicional: ($\Rightarrow$) Se n é par, então $n+1$ também é par.
   ($\Leftarrow$) Se $n+1$ é um número par, então n é par.

5. a) (DICA) Suponha que x é par e use o item a) da Definição 1.12. Em seguida, obtenha x^2 e use a hipótese (x^2 é ímpar) para chegar a um absurdo.

   b) (DICA) Idem ao anterior, mas usando o item b) da Definição 1.12.

   c) (DICA) Use a hipótese para obter que $2k = k$, em seguida, como deve-se admitir que a tese é falsa, ie, $k \neq 0$, significa que é permitido dividir ambos os lados da igualdade por k, que levará a um absurdo.

6. a) Qualquer n par escolhido será um contra exemplo.
   b) Qualquer x ímpar escolhido será um contra exemplo.
   c) 11   d) $a = 2$ e $b = 3$ e) $x = 41$.

7. Demonstração deixada a cargo do leitor.

8. Demonstrações deixadas a cargo do leitor.

9. Demonstrações deixadas a cargo do leitor.

10. a) Paulo não é paulista.
    b) Paulo é paulista e Ronaldo é carioca.
    c) Paulo é paulista ou Ronaldo é carioca.
    d) Se Paulo é paulista então Ronaldo é carioca.
    e) Se Paulo é paulista então Ronaldo não é carioca.

11. a) $p \wedge q$ b) $(\sim p) \vee p$ c) $q \longrightarrow p$ d) $(\sim p) \wedge (\sim q)$

12. b)   13. c)   14. c)   15. c)   16. c)   17. c)   18. c)

19. Demonstração deixada a cargo do leitor.

20. Basta dividir as moedas em três grupos: A, B e C. Coloque três moedas em cada um dos grupos A e B, e duas no grupo C. Coloque o grupo A em um prato e o grupo B em outro prato da balança. Temos apenas dois casos a serem analisados:

    a) **Se a balança se equilibrar:** significa que todas as moedas desses dois grupos possuem o mesmo peso, e consequentemente, a moeda mais leve estará no grupo C. Como o grupo C tem apenas duas moedas, bastará colocar cada uma delas em um prato e verificar, sem dúvida, qual é a mais leve.

    b) **Se a balança pender para um dos lados:** a moeda mais leve estará no lado mais leve. Sendo assim, descarte as moedas do lado mais pesado e as do grupo C, ficando, apenas, com as do grupo mais leve, que terá três moedas. Dessas três, escolha duas e coloque uma em cada prato. Temos, novamente, dois casos:

    i. **Se a balança se equilibrar:** a moeda mais leve é, sem dúvida, a que **não** foi colocada nos pratos.

    ii. **Se a balança pender para um dos lados:** a moeda mais leve será, sem dúvida, a do lado mais leve.

    Em qualquer um dos casos, a balança foi utilizada apenas duas vezes.

Capítulo 2

1. a) Números pares maiores do que 2 e menores do que 14.
b) Números primos menores ou iguais a 7.
c) Satélite natural da Terra.
d) Planetas do sistema solar com exceção da Terra.

2. Os conjuntos C e E são unitários.

3. Os conjuntos A e D são vazios.

4. a) V b) V c) V d) F e) F f) V g) F h) F
i) V j) V k) F l) V m) V n) V o) V p) F

5. a) V b) F c) V d) V e) F f) F g) V h) F i) V j) F

6. a) F b) F c) V d) F e) F f) F

7. Sim. Basta observar que $A = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$, já que a interseção entre esses conjuntos representa o conjuntos dos números que estão em $\mathbb{Q}$ e em $\mathbb{R}$ ao mesmo tempo e que $B = \mathbb{I} - \mathbb{Q} = \mathbb{I}$, pois é o conjunto de todos os números que estão em $\mathbb{I}$ e que não estão em $\mathbb{Q}$, ou seja, todo o conjunto $\mathbb{I}$. Portanto, $A \cup B = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

8. e) 9. e) 10. e) 11. b) 12. 78

13. (Dica) No primeiro caso lembre-se de mostrar que $A \cup B \subset B \cup A$ e que $B \cup A \subset A \cup B$. No segundo, a ideia é a mesma, mas com seus conjuntos específicos.

14. (Dica) Raciocínio análogo ao do exercício anterior.

15. A cargo do leitor.

16. É preciso mostrar que $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$ e que $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$. Para a primeira inclusão, considere $x \in (A \cup B)^C \Rightarrow x \notin A \cup B$. Agora, lembre-se do que significa negar o conectivo OU, representado aqui pelo símbolo de união. Com isso, você chegará que $x \in A^C \cap B^C$.

17. Dois conjuntos são disjuntos quando possuem interseção vazia. Ora, por definição, os irracionais são exatamente os números que não podem ser escritos como quociente de inteiros, ou seja, os que não são racionais. Logo, nenhum número pode ser racional e irracional simultaneamente, o que implica que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$, ou seja, são disjuntos.

18. Conclua que $\#A = 0$ e que $\#P(A) = 1 = 2^0$, que $\#B = 1$ e que $\#P(B) = 2 = 2^1$, que $\#C = 2$ e que $\#P(C) = 4 = 2^2$, e, finalizando, conclua que $\#D = 3$ e que $\#P(D) = 8 = 2^3$. Com isso, percebe-se que é provável que se $\#K = n$ então $\#P(K) = 2^n$.

19. (Dica) Observe que para os dois conjuntos finitos A e B, tem-se apenas três possibilidades: $A \subset B$, $A \cap B = \emptyset$ e $A \cap B \neq \emptyset$ com $A \neq B$.

a) $(A \subset B)$ Nesse caso, basta usar que $n(A \cup B) = n(B)$ e que $n(A \cap B) = A$.

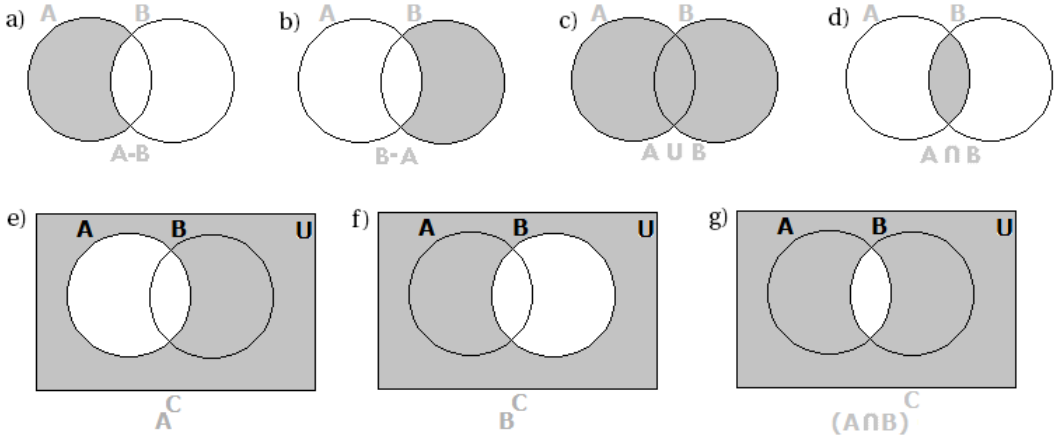
b) $(A \cap B = \emptyset)$ Agora, use que $n(A \cap B) = 0$ e que $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

c) $(A \cap B \neq \emptyset$ com $A \neq B)$ Basta usar que se $n(A - B) = x$, $n(B - A) = z$ e $n(A \cap B) = y$, então obrigatoriamente deve-se ter que $n(A \cup B) = x + y + z$.

Nos três casos, é interessante construir os diagramas de Venn para facilitar a visualização.

20. a) 615 alunos estudam inglês ou francês.
b) 97 alunos não estudam nenhuma das duas línguas.

21. As partes destacadas em cinza representam os conjuntos indicados:



22. c)

23. a) $A \cup B = \{-1, 0, 2, 3, 4, 5, 6\}$ b) $A \cap B = \{2, 3\}$

c) $A - B = \{4, 5, 6\}$ d) $B - A = \{-1, 0, 1\}$

24. a) V: (Dica) Uma forma de provar isso, é supor a soma de um racional x com um irracional y, e considerar que $x + y$ é um racional z. Com isso, fica obrigatório que y deve ser racional (porque), o que é um ABSURDO!

b) V: (Dica) Basta apresentar dois irracionais, p e q, cujo produto resulte em um racional. Exemplo, $p = q = \sqrt{2}$.

c) F: (Dica) Basta apresentar um contra exemplo, ie, dois irracionais, p e q, cuja soma resulte em um racional. Exemplo, $p = \pi$ e $q = -\pi$.

d) V: (Dica) Basta lembrar que toda dízima periódica é racional. Você sabe como escrever $1,8888\ldots$ como quociente de inteiros de denominador não nulo?

25. (Dica) Basta observar que não existe interseção entre as raças e, por isso, o total de indivídios da comunidade (letra a) será dado pelo somatório do total de indivíduos amarelos, brancos e pretos. Além disso, a hipótese de que 350 indivíduos **não** são pretos, significa que 350 deles ou são brancos ou são amarelos. Logo, o número de brancos adicionado ao número de amarelos deve ser igual a 350, o que permite obter o número de indivíduos amarelos.

26. $C_A^B = A - B = [0;\ 1] \cup [3;\ 5[$ 27. c)

28. Não. Considere os conjuntos $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ e $B = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5\}$. Então, como $A - B$ representa o conjunto dos elementos que estão em A mais não estão em B, segue que, para esse caso, $A - B = \emptyset$, já que não existe elemento em A que não esteja em B. Isso sempre ocorrerá nos casos onde $A \subset B$.

29. a) $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{I}$

b) $C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}_-$

c) $C_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{N}} = \mathbb{Q} - \mathbb{N}$, ou seja, todos os números racionais que **não** forem naturais.

d) $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{I}} = \mathbb{R} - \mathbb{I} = \mathbb{Q}$

e) $C_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$, isto é, todos os racionais que **não** forem inteiros.

30. $C_B^A = B - A = \{a,\ b,\ h,\ i,\ j\}$.

Capítulo 3

1. a) 1 b) 13 c) 1 d) $\frac{1}{16}$
e) $-\frac{1}{27}$ f) $\frac{27}{1000}$ ou $0,027$ g) $\frac{1}{3}$ h) $\frac{25}{4}$
i) $\frac{25}{4}$ j) 8 k) $\frac{1}{49}$ l) $\frac{27}{8}$
m) 1 n) -1 o) $-\frac{1}{8}$ p) $-\frac{1}{1.000.000}$ ou $-0,000001$

2. $Z = 0$ se a é par e $Z = 2$ se a é ímpar.

3. $(x \cdot y)^{20}$ **4.** b) **5.** b)

6. Considere, por exemplo, -3^2 e 2^{3^2}. Para esses casos temos que:

$$-3^2 = -(3 \cdot 3) = -9 \neq (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9 \Longrightarrow -3^2 \neq (-3)^2$$

$$2^{3^2} = 2^{3 \cdot 3} = 2^9 = 512 \neq \left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64 \Longrightarrow 2^{3^2} \neq \left(2^3\right)^2.$$

7. d) **8.** a) a^{10} b) $(a \cdot b)^{12}$ c) $a^{14} \cdot b^5$ d) $(a \cdot b)^{40}$

9. $x^{-5}y^6$ **10.** a) x^5y^{10} b) $x^{10}y^2$ c) x^2y^{24} d) $x^{33}y^{-30}$ e) $\frac{1}{xy}$ f) $\frac{x+y}{xy}$

11. a) **12.** $\frac{1}{a+b}$

13. A resposta do aluno está errada. (Dica) Basta observar a Definição 3.3.

14. a) 2 b) 1 c) 2
d) 3 e) 0 f) $\begin{cases} a-1 & \text{se} \quad a \geq 1 \\ 1-a & \text{se} \quad a < 1 \end{cases}$
g) -2 h) 7 i) -2
j) 5 k) -3 l) -8

15. a) $\begin{cases} x-2 & \text{se} \quad x \geq 2 \\ 2-x & \text{se} \quad x < 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+5 & \text{se} \quad x \geq -5 \\ -x-5 & \text{se} \quad x < -5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-3 & \text{se} \quad x \geq \frac{3}{2} \\ 3-2x & \text{se} \quad x < \frac{3}{2} \end{cases}$ d) $-5x+2, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$

16. a) $\begin{cases} \sqrt[3]{a^2b} & = & \sqrt[12]{a^8b^4} \\ \sqrt[6]{ab^2} & = & \sqrt[12]{a^2b^4} \\ \sqrt[4]{a^3b^2} & = & \sqrt[12]{a^9b^6} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \sqrt{xy^2} & = & \sqrt[18]{x^9y^{18}} \\ \sqrt[3]{x^2y^3} & = & \sqrt[18]{x^{12}y^{18}} \\ \sqrt[9]{x^2y} & = & \sqrt[18]{x^4y^2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt[4]{a^3b^2} & = & \sqrt[12]{a^9b^6} \\ \sqrt{a^5b^2} & = & \sqrt[12]{a^{30}b^{12}} \\ \sqrt[6]{xy^2} & = & \sqrt[12]{x^2y^4} \end{cases}$ d) $\begin{cases} \sqrt{x^2y^4} & = & \sqrt[10]{x^{10}y^{20}} \\ \sqrt[5]{xy^2} & = & \sqrt[10]{x^2y^4} \\ \sqrt[10]{a^2b^3} & = & \sqrt[10]{a^2b^3} \end{cases}$

17. a) F b) F c) V d) F e) F f) F g) F h) V i) V j) F k) V l) F

18. a) 14 b) $3\sqrt{2}$ c) 12 d) 9 e) 5 f) $5\sqrt[3]{2}$
g) $4\sqrt[4]{2}$ h) $16\sqrt[3]{4}$ i) $20\sqrt{5}$ j) $4\sqrt[3]{2}$ k) $6\sqrt[4]{3}$ l) $3\sqrt[3]{2}$

19. a) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ b) 6 c) $\sqrt[5]{5}$ d) $\sqrt[3]{5}$ e) $3\sqrt[12]{3^7}$

20. a) $10\sqrt[3]{2}$ b) $10\sqrt{2}-\sqrt{3}$ c) 33 d) $2+\sqrt[6]{72}$

21. a) 3 b) $2\sqrt[15]{2}$ c) $\sqrt[4]{b^3}$ d) 2^3

22. a) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt[3]{3^2}$ d) $\frac{9}{2}\sqrt[5]{4}$ e) $-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ f) $\frac{5(3\sqrt{7}-\sqrt{2})}{61}$

23. a) $7^{1/2}$ b) $2^{8/3}$ c) $3^{2/15}$ d) $3^{-2/3}$ e) $3^{2/3}$ f) 7

24. a) 3 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{9}{10}$ e) $\frac{10\sqrt{3}}{9}$ f) 10 g) $\frac{1}{9}$

25. -158 26. $m=\frac{2}{3}$ 27. b) 28. d) 29. e)

30. a) 31. a) 32. c) 33. c) 34. d)

35. b) 36. a) 37. e) 38. $\sqrt[3]{729}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt[4]{38416}$

39. c) 40. c)

41. O montante será de $R\$\ 714,12$. (Dica) Observe que é necessário converter 1,5 ano para meses.

42. $1,5\times 10^8$ km 43. 3×10^{-14} 44. $9,46053\times 10^{12}$ km 45. e) 46. a)

47. e) 48. e) 49. a) 50. c) 51. a) 52. a)

53. d) (Dica) Pode-se escrever 4^{16} como potência de 2 e, posteriormente, desmembrá-la como o produto de duas potências de 2, sendo que uma delas deve ter expoente 25. Com isso, usando a propriedade do produto de potências de mesmo expoente, obtém-se, do lado esquerdo da igualdade, uma potência de 10. Em seguida, pode-se escrever a potência de 2 que sobrou em notação científica e usar o produto de potências de mesma base para agrupar as duas potências de 10 do lado esquerdo da igualdade, restando apenas comparar os seus dois lados.

54. d) 55. $\sqrt{A^4+B^2}=5$ 56. a)

57. a) $y(2017)\cong 204.231.702$ habitantes. b) Diferença percentual de aproximadamente 1,65%.

58. b)

Capítulo 4

1. a) $Re(z)=-3$ e $Im(z)=7$ b) $Re(z)=3$ e $Im(z)=-\frac{7}{3}$
   c) $Re(z)=-\frac{1}{2}$ e $Im(z)=-4$ d) $Re(z)=5\pi$ e $Im(z)=\sqrt{11}$

2. a) $5+i$ b) $3-i$ c) $\frac{19}{4}-\frac{37}{5}i$ d) $48-39i$ e) 13 f) $7-24i$

3. a) 17 b) $-1-\frac{5}{4}i$ c) $\frac{5}{4}-\frac{5}{8}i$ d) $\frac{51}{4}-17i$

4. a) $x_1=\frac{-3+i}{2}$ e $x_2=\frac{-3-i}{2}$ b) $x_1=3i$ e $-3i$
   c) $x_1=\frac{1+i}{2}$ e $x_2=\frac{1-i}{2}$ d) $x_1=\frac{5+5\sqrt{3}i}{2}$ e $x_2=\frac{5-5\sqrt{3}i}{2}$

5. a) $(x-7-i)(x-7+i)=0$ b) $2\left(y-3i\right)\left(y+i\right)=0$

6. d) 7. $x=5$ e $y=2$ 8. b) 9. $a=3$ 10. d)

11. (Dica) Basta considerar, por exemplo: $z=x+yi$, $z_1=a+bi$ e $z_2=c+di$. Com isso, determina-se $\overline{z}$ e, depois, $\overline{\overline{z}}$ para resolver a letra a. Em b, efetua-se a soma de z com o que já foi encontrado para $\overline{z}$ e concluir. Para a letra c, pode-se determinar z_1+z_2 e posteriormente obter $\overline{z_1+z_2}$ para que, com arranjos adequados, conclua-se o que foi pedido. Em d, pode-se utilizar a mesma ideia usada em c.

12. d)

Capítulo 5

1. $gr(P) = 9$ 2. a) $gr(P) = 7$ b) $gr(P) = 0$ c) $gr(P) = 1$ d) $\nexists\, gr(P)$

3. a) $A + B = 3x^2y^3$ b) $A - B = -5x^2y^3$ c) $B - A = 5x^2y^3$
   d) $A \cdot B = -4x^4y^6$ e) $-C + 4D = -\frac{14}{3}ab$ f) $-6C \cdot D = 4a^2b^2$

4. a) $\frac{2}{7}xy^2$ b) $8ab^2c^2$ c) $9x^4y^6z^8$ d) $\frac{27}{64}a^9b^6c^3d^9$

5. (Dica) Basta usar que $(x \pm y)^3 = (x \pm y)(x \pm y)^2$, desenvolver o quadrado da soma e aplicar a distributiva.

6. a) $7x$ b) $-x^2 + 2x + 21$ c) $x^2 - 50x + 18$
   d) $-4x^3 + 5x^2 + 7x - 2$ e) $x^3 - x^2 - 5x + 6$ f) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

7. a) $a^3 + 4a\sqrt{a}b + 4b^2$ b) $4b + 4a\sqrt{b} + a^2$ c) $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2}$ d) $\frac{1}{x^2} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^2}$
   e) $\frac{1}{x^2} + 2 + x^2$ f) $\frac{1}{x^2} - \frac{4}{y^2}$ g) $64x^3 - 144y + 108y^2 - 27y^3$ h) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

8. d) 9. b) 10. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$ 11. d)

12. a) $(f + g)(x) = 12 - x + 5x^2 + 5x^3$ b) $(g - h)(x) = 3 + 4x + x^2 + 5x^3 - x^4$
    c) $(h - f)(x) = -5 - x - 4x^2 + x^4$

13. $h(x) = 2x^2 + 4$ 14. $gr(f + g) \leq n$ e $gr(fg) = 2n$

15. $f(x) = 0$. (Dica) Como a função é do segundo grau, pode-se considerar $f(x) = ax^2 + bx + c$. Usando que $f(1) = 0$, chega-se a $a + b + c = 0$ e, calculando $f(x-1)$ obtém-se $f(x-1) = ax^2 + (b-2a)x + (a - b + c)$. Mas como $f(x) = f(x-1)$, basta igualar os coeficientes correspondentes, obtendo que $a = b = c = 0$.

16. c). (Dica) Determine $gr\left(g - h\right)$ e posteriormente use a propriedade para o grau do produto de polinômios não nulos para determinar $gr\left[f \cdot \left(g - h\right)\right]$.

17. O grau do dividendo é 6 para o grau do resto igual a 1 e também 2. (Dica) Considere D o dividendo, d o divisor, q o quociente e r o resto. Então, tem-se que $D = qd + r$. Logo, $gr(D) = gr(qd + r)$. Então, basta usar as propriedades de grau da soma e do produto para obter $gr(D)$.

18. d)

19 c). (Dica) Use a propriedade do grau do produto para obter $gr(p^3)$, $gr(p^2)$ e $gr(2p)$. Em seguida, basta usar a propriedade do grau da soma, observando que o maior grau prevalecerá.

20. e) 21. a) $q(x) = 3x^2 - x + 8$ e $r(x) = -5x^2 + 21x - 11$, b) $q(x) = x^2 - x$ e $r(x) = -x + 13$

22. $r(x) = 1$

23. c). (Dica) Analisar cada item, concluindo que apenas o da letra c) é verdadeiro. Para a), tem-se que $p(10) = [2 \cdot 10 - 6]q(10) + 10 - 10 = 14q(10) = 0$, pois 10 é raiz de $q(x)$, então a) é verdadeira. Calculando $p(3)$ pela segunda expressão de $p(x)$, conclui-se que b) também é verdadeira. Em c) basta observar que $p(x)$ pode ser escrito como $p(x) = (2x - 6)(mx^2 + nx - 3) + x - 10$ e que o coeficiente d é dado pelo produto dos termos de grau zero dos fatores $2x - 6$ e $mx^2 + nx - 3$ subtraído de 10, ou seja, $d = [-6 \cdot (-3) - 10] = 8$, o que implica que c) é FALSA. Em d) observe que $2m$ é exatamente o coeficiente do produto $2x \cdot mx^2 = 2mx^3$, que ao ser comparado com o primeiro termo da primeira expressão para $p(x)$ leva a $m = 2$, ou seja, d) é verdadeira.

24. (Dica) Observe que, como $g(x)$ tem $a = 1$ e -1 e -2 como raízes. Então, pelo Teorema 5.8 vem que $g(x) = (x+1)(x+2)$. Prove que -1 e -2 também são raízes de f. Em seguida, conclua, pelo Teorema 5.5, que f é divisível por $x+1$ e $x+2$, e portanto, pelo Teorema 5.6 será divisível por $(x+1)(x+2) = g(x)$.

25. a) $q(x) = 5x^3 - 27x^2 + 82x - 246$ e $r(x) = 725$ b) $q(x) = 81x^4 + 54x^3 + 36x^2 + 24x + 16$ e $r(x) = 128/3$

26. e) 27. $\sqrt{2}/2$

28. Velocidade de A é 10 m/s e a velocidade de B é 8 m/s. (Dica) Considere como v a velocidade de B e, consequentemente, por $v+2$ a velocidade de A. Lembrando que $v = dist\hat{a}ncia/tempo$, vem que $tempo = dist\hat{a}ncia/velocidade$. Então, o tempo gasto para B dar uma volta é $120/v$ e o tempo gasto por A é $120/(v+2)$. Use o fato de que A gasta 3 segundos a menos que B, tem-se que $(120/v) - 3 = 120/(v+2)$. Ao se resolver essa última equação para v obtém-se os resultados.

29. $x^3 + y^3 = 5/2$. (Dica) Ao se substituir as duas condições dadas na igualdade $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ conclui-se que $xy = -1/2$. Agora, usando que $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ tem-se que $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$. Levando o valor de xy e os das duas condições nessa última igualdade, chega-se ao resultado.

30. $3x_1x_2 = 108$. (Dica) Como $gr(P) = 3$, segue que $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Além disso, por hipótese ele é divisível por $x-3$ e, por isso, o Teorema 5.5 garante que $P(3) = 0$. Com isso, conclua que $P(0) = 12$ e que $d = 12$. Em seguida, obtenha $P(x-3)$ e use a hipótese de que $P(x) = P(x-3) - x^2 - 3$ para obter os coeficientes a, b e c. Sendo assim, $P(x)$ fica determinado e pode ser dividido por $x-3$, que resultará em uma divisão exata onde $Q(x) = -x^2/9 - 5x/6 - 4$. Multiplicando-se $Q(x) = 0$ por -9, obtém-se uma equação quadrática equivalente (ou seja, que possui as mesmas raízes de $Q(x)$). Aplicando a relação de Girard para o produto das duas raízes de $Q(x)$, x_1 e x_2, conclui-se que $x_1x_2 = 36$. Como a outra raíz de $P(x)$ é 3, o produto das três raízes é $3x_1x_2 = 3 \cdot 36 = 108$.

31. Uma solução possível é $p(x) = x^4 - (2+3i)x^3 + (1+6i)x^2 - (2+3i)x + 6i$. (Dica) Basta observar que como as raízes devem ser i, $-i$, $3i$ e 2, o polinômio deve ser divisível por $(x-i)$, $(x+i)$, $(x-3i)$ e $(x-2)$. Logo, será divisível pelo produto desses 4 binômios de grau 1. Como ele deve ter grau 4 e o produto desses binômios já terá essa ordem, pode-se considerar o quociente como $q(x) = 1$. Então, $p(x)$ pode ser obtido da forma $p(x) = (x-i)(x+i)(x-3i)(x-2)$.

32. c). (Dica) Basta usar as relações de Girard para ambos os polinômios.

33. Qualquer polinômio da forma $P(x) = Q(x)(x-2)(x+3)^2(x-2i)^2(x+2i)^2$, onde $Q(x)$ é um polinômio não nulo. (Dica) É claro que o polinômio gerado pelo produto $(x-2)(x+3)^2(x-2i)^2(x+2i)^2$ possui ***exatamente*** as raízes solicitadas. Então, qualquer polinômio da forma $P(x) = Q(x)(x-2)(x+3)^2(x-2i)^2(x+2i)^2$ terá ***pelo menos essas raízes***, podendo ter outras também.

    a) O menor grau possível é o grau de $(x-2)(x+3)^2(x-2i)^2(x+2i)^2$, ou seja, 7.

    b) Sim! Basta considerar $Q(x)$ tal que $gr(Q) > 3$.

34. As raízes são: -1 e $1/2$. (Dica) Em $2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ percebe-se que se $x^2 = 1$ e $x^3 = -1$ a igualdade será satisfeita. Isso acontece claramente quando $x = -1$, o que implica que -1 é uma raiz. Então, $2x^3 + 3x^2 - 1$ é divisível por $x+1$, com quociente $2x^2 + x - 1$, que permite obter as outras raízes, sendo que uma delas será -1 (novamente) e a outra será $1/2$.

35. $a = 2$, $b = -2$ e $c = 3$

36. As raízes são: 0, $1+2i$, $1-2i$, $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. (Dica) Já que $p(1+2i) = 0$ segue que $1+2i$ é raiz de $p(x)$, e como os coeficientes de $p(x)$ são reais, o Teorema 5.1 garante que $1-2i$ também é raiz desse polinômio. Além disso, como $p(x)$ não possui coeficiente independente, é claro que

$p(0) = 0$, ou seja, 0 é outra raiz. Portanto, $p(x)$ é divisível por $x(x-1-2i)(x-1+2i)$. Agora, basta efetuar a divisão de $p(x)$ pelo resultado da última multiplicação indicada, obtendo um polinômio de grau 2, que permite obter as outras duas raízes.

37. $a = -1$ e $b = 0$

38. a) $f(0) = 1$ b) $f(-1) = 0$ c) $f(1) = 4$ d) $f(x+1) = x^3 + 4x^2 + 5x + 4$ e) $f\left(f(-1)\right) = 1$

39. As raízes são: $-1,\ 1,\ -\sqrt{2m-1}$ e $\sqrt{2m-1}$. (Dica) Basta fazer a substituição de variável $y = x^2$ em $x^4 - 2mx^2 + (2m-1) = 0$, onde se obterá duas raízes, y_1 e y_2 (Observe que como $m > 1$, a obtenção de $\sqrt{(m-1)^2}$ é simples.). Em seguida, use o fato de que $x = \pm\sqrt{y}$, para obter as quatro raízes de $p(x)$.

40. a) 41. b) 42. $a = \pm\sqrt[4]{4}$ e $b = 1$

43. $r(x) = x+3$. (Dica) Observe que A pode ser escrito como $A(x) = (x-5)q_1 + 8$ e $A(x) = (x-3)q_2 + 6$. Logo, $A(5) = 8$ e $A(3) = 6$. Ao se dividir A por $(x-5)(x-3)$ teremos que $A(x) = (x-5)(x-3)q_3 + r(x)$. Usando essa última igualdade, vem que $A(5) = r(5) = 8$ e que $A(3) = r(3) = 6$. Como $(x-5)(x-3)$ tem grau 2, obrigatoriamente deve-se ter $gr(r) = 1$, ie, $r(x) = ax + b$. Calculando $r(5)$ e $r(3)$ com a função obtida para $r(x)$ chega-se aos valores de a e b.

44. d) 45. b) 46. $P(i) = 4 + 2i$ e $P\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 0$

47. $-4,\ i,\ -i$. Todas com multiplicidade 1, ou seja, são raízes simples.

48. $gr(P) = 23$

49. a) $P(x) = 2(x-3)(x-2)$ b) $Q(x) = 2(x+3)(x-3)$ c) $R(x) = (x-4i)(x+4i)$
d) $S(x) = (x-1)(x-2)^2$ e) $T(x) = (3x-1)(3x+1)$ f) $U(x) = 4x^2\left(x - \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(x + \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$

50. $p(x) = (x-1)(3x-1)(3x+1)$ 51. b)

52. $a = c = -2,\ b = 2$ e $d = 1$. (Dica) Como todos os coeficientes são reais e i é uma de suas raízes, pelo Teorema 5.1, segue que $-i$ também é uma raiz. Portanto, pelo Teorema 5.6, tem-se que $p(x)$ é divisível por $(x-i)(x+i)$. Pelo mesmo teorema, como 1 é raiz dupla segue que $p(x)$ também é divisível por $(x-1)^2$. Portanto, pode-se concluir que como $gr(p) = 4$ e o coeficiente de x^4 é 1, deve-se ter que $p(x) = (x-i)(x+i)(x-1)^2$. Ao se comparar o resultado dessa última multlicação com a expressão inicial de $p(x)$ obtém-se os coeficientes.

53. $k(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

54. $q(-1) = 66$. (Dica) Basta utilizar o Teorema 5.8 para escrever $q(x)$ em sua forma fatorada, que ficará em função da raiz que ainda não é conhecida, e em seguida, aplicar a condição $q(3) = 30$ para obter essa raiz. Dessa forma, $q(x)$ fica definida e é possível calcular $q(-1)$.

55. É só apresentar qualquer par de polinômios não nulos e de mesmo grau, f e g, de forma que o coeficiente do termo de maior grau de um deles seja simétrico do coeficiente correspondente do outro. Por exemplo: $f(x) = -2x + 3$ e $g(x) = 2x + 2$. Dessa forma, $(f+g)(x) = 5$ e $gr(f+g) = 0$.

56. a) Verificação direta, basta efetuar as operações.

b) A comutatividade garante que $A + B = B + A$. Nesse caso, como $A - B = A + (-B)$ ela garante que $A - B = -B + A$ e não $B - A$.

57. No Exemplo 5.23 percebe-se em a) que $gr(A+B) = 3 = max\{2,3\}$ porque os polinômios possuem graus diferentes. De fato, sejam $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ e $g(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$, com $a_n, b_m \neq 0$ e $n > m$. Então, o termo $a_n x^n$ nunca será anulado ao se fazer $f + g$, pois ele não será operado com nenhum termo de g, o que fará com que $gr(f+g) = n = max\{n,m\}$. Uma outra forma desse fato acontecer é quando $n = m$ e $a_n \neq -b_m$, pois se $a_n = b_m$, ao se efetuar a soma teríamos $a_n x^n + b_m x^m = -b_m x^m + b_m x^m = 0$, fazendo o grau de $f + g$ seja menor do que o máximo entre m e n, ou seja, $gr(f+g) < max\{n,m\}$, conforme se observa na parte b) do exemplo.

58. a) Não! Basta considerar, por exemplo, $A = 2x+1$ e $B = -2x+1$. Então, $gr(A+B) = 0$ enquanto $gr(A) + gr(B) = 2$.

    b) Sim! É exatamente o resultado do Teorema 5.4.

    c) Não! Considere, por exemplo, $A = x^2$ e $B = 4$. Então, $gr(AB) = gr(4x^2) = 2 = gr(A)$.

59. $f(x) = 2x^2+4x+2$. (Dica) Considere $f(x) = ax^2+bx+c$ e aplique as condições, ou seja: $f(0) = 2 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow f(x) = ax^2+bx+2,\ \ f(-1) = 0 \Rightarrow a-b+2 = 0$ e $f(1) = 8 \Rightarrow a+b+2 = 8$. Resolvendo-se essas duas equações simultaneamente obtém-se os valores de a e b.

60. (Dica) ($\Longrightarrow$) Considere P é divisível por $(x-a)$, ou seja, $r(x) = 0$ (resto e nulo). Mas, pelo Lema 5.1 tem-se que $r(x) = P(a)$, então a é raiz de P.

    ($\Longleftarrow$) Considere $P(a) = 0$. Na divisão de P por $(x-a)$ segue que $P(x) = (x-a)q(x) + r(x)$, sendo que pelo Lema 5.1 deve-se ter $r(x) = P(a)$. Então, $r(x) = 0$ e consequentemente P é divisível por $(x-a)$.

Capítulo 6

1. c). (Dica) Basta observar que $\frac{x-y}{x} = 1 - \frac{y}{x}$ e que $\frac{y}{x} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-1}$.

2. d)

3. e). (Dica) Ao invés de escrever $m^{1/2}$ como radical, desenvolva $\left(m^{1/2} + m^{-1/2}\right)^2$ usando o quadrado da soma, e observe que $1/m = m^{-1}$.

4. a) $3a(-3a+2)$ b) $10b(b+1)$ c) $25(x+1)(x-1)$ d) $(x-3)(x-2)$
   e) $x(24x-13)$ f) $(x^3-1)(x^3+1)$ g) $2a(2a+1)^2$ h) $x^2(x-1)^2$
   i) $(x-y)(x+y-4)$ j) $(x+y)(x-y+2)$ k) $(b-c)(a+b)$ l) $(l-\pi)(\pi-2)$
   m) $\left(3a+\frac{2}{9}\right)\left(3a-\frac{2}{9}\right)$ n) $(1+u)(1-u)$

5. e) 6. b) 7. b) 8. a) 9. b) 10. b) 11. a) 12. a)

13. a) 14. c) 15. b) 16. d) 17. e) 18. c) 19. d) 20. e)

21. d) 22. e) 23. c) 24. $\frac{x+1}{x(x-1)}$ 25. $\frac{4}{x+y}$ 26. b) 27. a)

28. c) 29. c) 30. $a = 8,\ b = -9,\ c = 3$ 31. b) 32. $\frac{1}{b}$ 33. c)

34. c) 35. d) 36. a) 37. b) 38. c)

39. b) (Dica) Observe que a igualdade pode ser reescrita como $x - \sqrt{3} = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$, e que isso garante que $x > \sqrt{3}$ (Porque?). Eleve ao quadrado ambos os lados da última igualdade e conclua que $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4(\sqrt{3}-1) = 0$. Conclua que para essa equação quadrática vale que $\Delta = \left(4-2\sqrt{3}\right)^2$ e com isso, obtenha as raízes da equação. Uma delas não poderá ocorrer (Porque?) e a outra será $x = 2 \in \mathbb{Q}$.

40. $\frac{1}{y-2}$ 41. -4 42. 2 43. -32 44. a)

45. a) (Dica) O numerador pode ser fatorado por agrupamento e o denominador pode ser escrito como o quadrado da soma de dois termos.

Capítulo 7

1. a) Não é possível, pois para se fazer A^2 e B^2 é necessário que A e B sejam quadradas.

b) $-3(A+B) = \begin{bmatrix} -9 & -9 \\ 21 & -6 \\ -15 & -3 \end{bmatrix}$ c) $(E^t)^2 + (F^t)^2 = \begin{bmatrix} 17/4 & 2 \\ 2 & 21/4 \end{bmatrix}$

d) Não é possível, pois o produto DE não está definido, já que o número de colunas de D é diferente do número de linhas de E.

e) $D^tE+B = \begin{bmatrix} 6 & 25/6 \\ -2 & 5/4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ f) $DA+F = \begin{bmatrix} 22/3 & 0 \\ -5/2 & 3 \end{bmatrix}$ g) $(DA+F)^t = \begin{bmatrix} 22/3 & -5/2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

h) $CB+2A = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -22 & -6 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

i) Impossível, pois apesar do produto B^tC estar definido, a soma B^tC+2B não está, pois as ordens de B^tC e $2B$ são diferentes.

2. Considere a matriz I_3, por exemplo. É claro que ela e diagonal (e obviamente quadrada), porém, não é nula. Ou seja, não vale a volta do resultado, sendo I_3 um contra-exemplo.

3. $A \neq B$ 4. $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 8 \\ -1/2 & 0 & 1/4 & 1 \\ -3 & 0 & 3/2 & 6 \end{bmatrix}$ 5. c) 6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

7. a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 16 & 32 \\ 8 & 1 & 32 & 64 \end{bmatrix}$

8. a) $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

9. $(A \cdot B^t)^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

10. $a = 14$ e $b = 1$ 11. $a = -1$ e $b = 2$ 12. $x = 0$, $y = 1$, $w = \pm i$ e $z = 3$

13. a) (Dica) Calcule A^2, A^3 e A^4, e perceba que em todos esses casos os elementos a_{11} e a_{22} são sempre iguais a 1, que a_{21} é sempre igual a 0 e que o elemento a_{21} é sempre igual ao expoente de A. Com isso, obtém-se facilmente a matriz A^{100} e, consequentemente, a soma dos seus elementos.

14. Considerando que $A_{m\times n}$, $B_{r\times t}$ e $C_{u\times v}$, vem que:

7.2.1: É necessário que a ordem de B seja $n \times m$, ou seja, que $n = r$ e $t = m$.

7.2.2: É necessário que a ordem de B seja $n \times u$, ou seja, que $n = r$ e $t = u$.

7.2.3: É necessário que A e B tenham a mesma ordem, isto é $m = r$ e $n = t$, e que C tenha ordem $n \times v$, ou seja $n = u$.

7.2.4: É necessário que A e B tenham a mesma ordem, isto é $m = r$ e $n = t$, e que C tenha ordem $u \times m$, ou seja $v = m$.

7.2.5: É necessário que A tenha ordem $m \times n$ e B tenha ordem $n \times t$, isto é, $r = n$.

7.2.6: A matriz A pode ter qualquer ordem $m \times n$.

7.2.7: É necessário que A e B tenham a mesma ordem, isto é $m \times n$, logo, deve-se ter $m = r$ e $n = t$.

7.2.8: A matriz A deve ser quadrada de ordem n, isto é, $m = n$.

7.2.9: Considerando A de ordem $m \times n$, a matriz nula deve ter ordem $n \times m$.

15. Existem infinitos exemplos de matrizes A, B que satisfazem $AB \neq BA$. Um exemplo que pode ser considerado é o par de matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

16. (Dica) Basta mostrar que $AB = 0$, pois como $A \neq 0$ e $B \neq 0$, o resultado será direto.

17. (Dica) Basta mostrar que $AC = BC$, e como por hipótese se tem que $A \neq B$, o resultado fica verificado.

18. $x = 5/4$, $y = -5/4$, $z = 41/4$ e $w = 15/4$

19. $a = 11$

20. Qualquer matriz $K = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ onde $a = 0$ ou $a = 2$ e $b = 0$ ou $b = 2$.

21. b) A igualdade ocorre quando $AB = BA$, ou seja, quando as matrizes A e B comutam.

22. $a + b + c = 2$.

23. Sim.

24. Quaisquer matrizes de ordem 2 que não comutam, por exemplo: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

25. a) $C = AB = \begin{bmatrix} 1400 & 1800 & 1750 \\ 1450 & 1600 & 1700 \end{bmatrix}$

b) O elemento c_{23} representa o total de fertilizante do tipo Z, em kg, utilizado na região Q para as três culturas.

26. c)

27. d)

28. c)

29. e)

30. e)

31. d)

32. a) (Dica) Pelo item b) do enunciado sabe-se que $MC = P$, e foram dadas as matrizes C e P. Construa uma matriz genérica M de ordem 3, cujos elementos são m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{21}, m_{22}, m_{23}, m_{31}, m_{32}, m_{33}. Faça a multiplicação dessa matriz, M, pela matriz C, e iguale o resultado à matriz P. Pela igualdade de matrizes será possível obter os valores dos elementos de M, bastanto, posteriormente, transpor os números para letras, conforme descrito no item c) do enunciado.

33. a) (Dica) Basta observar que o custo da produção dos pratos P_1, P_2 e P_3 é dado pelo produto PC.

34. $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Capítulo 8

1. a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & -4 \\ -1/2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -5 \\ 3 & -7 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 7 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix}$

2. $\alpha = \left(-1, \frac{2}{3}, 4\right)$ é solução apenas do sistema B.

3. $a = -4$ e $b = 3$ 4. a) $\alpha = \left(\frac{1}{2},\ 3\right)$ b) $\alpha = (-2,\ 1)$ c) $X = \{(\alpha,\ 2\alpha - 3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

5. a) $\alpha = (1,\ 0,\ -1)$ e o sistema é possível e determinado.

   b) $\alpha = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -4\right)$ e o sistema é possível e determinado.

   c) O sistema não possui solução, ou seja, é um sistema impossível.

   d) $X = \left\{\left(1 - \frac{13}{5}\alpha,\ -\frac{11}{5}\alpha,\ \frac{\alpha-5}{5},\ \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ e o sistema é possível e indeterminado.

   e) $X = \left\{\left(\frac{\alpha-4}{5},\ \frac{-11\alpha+4}{5},\ \frac{7-13\alpha}{5},\ \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ e o sistema é possível e indeterminado.

   f) O sistema não possui solução, ou seja, é um sistema impossível.

6. a) O sistema I é impossível.

   b) $X = \left\{\left(-\frac{11}{5} - \alpha,\ 6 + \frac{5}{2}\alpha,\ \frac{14}{5} + \frac{3}{2}\alpha,\ \frac{\alpha}{5},\ \alpha\right) \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ e o sistema é possível e indeterminado.

   c) $X = \left\{\left(\frac{17-\beta+8\alpha}{32},\ \frac{-3-13\beta+40\alpha}{32}\alpha,\ \beta\right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$ e o sistema é possível e indeterminado.

   d) $\alpha = (1,\ 2,\ 7)$ e o sistema é possível e determinado.

   e) $\alpha = (-2,\ 2,\ 1/2)$ e o sistema é possível e determinado.

7. a) 8. d) 9. d) 10. d) 11. $a = -1$ e $b \neq 0$ 12. $\alpha = (-1,\ 0,\ 1,\ 2)$

13. (Dica) Basta usar o método de Gauss-Jordam para escalonar a matriz aumentada do sistema. A última linha será equivalente à equação $0x + 0y = 6 + k$. Portanto, para que a igualdade seja verdadeira, deve-se ter que $k = -6$.

14. d)

15. (Dica) Trocando-se as linhas da matriz aumentada do sistema e fazendo seu escalonamento, a segunda linha gera a equação $0x + \frac{6+k}{2}y = 2$, que só possui solução apenas quando $k \neq -6$.

16. a) (Dica) Basta usar o método de Gauss-Jordan para escalonar a matriz aumentada do sistema. Com isso, uma análise nos coeficientes da equação resultante, que estarão em função de m, permitirá concluir que $m \neq 2$ e $m \neq -3$.

    b) (Dica) Basta considerar os casos onde $m = 2$ e $m = -3$. Será de fácil percepção que não se pode considerar $m = 2$ e que o valor $m = 3$ fará com que uma igualdade falsa apareça, levando à conclusão que para esse valor o sistema não terá solução. Portanto, o sistema **não** tem solução para $m = -3$.

    c) (Dica) Usa-se a matriz escalonada para substituir m por 1. Com isso, chega-se a valores para as quatro variáveis e conclui-se que $2x + y - z - 2w = -3$.

17. b) 18. a) 19. (Dica) Basta mostrar que o sistema e possível e indeterminado.

20. $\beta = -4$ 21. a) $\alpha = (0,\ 0,\ 0)$ b) $\{(-\alpha,\ \alpha,\ 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

22. **NÃO!** Ao se resolver o sistema, chega-se apenas à solução trivial, o que implica que ele é possível e determinado.

23. Basta resolver o sistema pelo método de Gauss-Jordan.

24. 4 cadeiras. 25. e) 26. d)

27. b) (Dica) Com as informações do texto é possível obter duas equações, ambas com um termo relativo a duas vezes o preço do produto A, digamos $2P_A$. Isolando esse termo em uma das equações, basta substituír a parte isolada na outra equação e será possível achar o valor de P_A, e consequentemente, $3P_A$.

28. e)

29. 453 kcal

30. c) (Dica) Com as informações dadas no problema é possível obter duas equações lineares de três incógnitas, cujas incógnitas são os preços das lâmpadas. Uma outra equação pode ser obtidas para a soma dos preços de um modelo de cada lâmpada, de forma que a soma seja igualada a uma constante, a, por exemplo, que será o valor procurado. Resolva o sistema para as três equações, usando o método de Gauss. Você perceberá que uma das linhas ficará com os elementos representativos das variáveis iguais a zero. Sendo assim, a única forma do sistema ser possível é que o elemento representante do termo independente dessa linha também seja nulo. Com isso obtém-se que $a = R\$31,70$.

31. c)

Capítulo 9

1. $|A| = -66$.

2. $|B| = \left|B^t\right| = 3 + 8i$.

3. As verificações são deixadas a cargo do leitor. Os itens das Propriedades 9.1 utilizados para as letras a), b), c), d), e) e f) são, nessa ordem, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

4. a) $det(C+D) = 0$, b) $det(C) + det(D) = 0$

5. Basta mostrar que $|K| = 0$.

6. $\beta = -3$.

7. (Dica) Pelo Corolário 9.1 basta mostrar que $|K| \neq 0$.

8. a) $det(A) = 650$ b) $det(A) = -856$ c) $det(A) = 24$
d) $det(A) = -2\pi + 4 + 2i\left[-2\sqrt{3}(2+\pi) - \sqrt{2}(\pi - 2)\right]$ e) $det(A) = 50i - 2$ f) $det(A) = -6i$

9. Deixada a cargo do leitor.

10. Deixada a cargo do leitor.

11. Para N: $A_{11} = -7$, $A_{22} = -8$, $A_{33} = 2$. Para M: $A_{13} = 6$, $A_{21} = -5$, $A_{32} = -23$.

12. $det\left(H^{-1}\right) = -1/47$

13. Deixada a cargo do leitor.

14. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 5/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -10 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\nexists\, C^{-1}$

d) $D^{-1} = \begin{bmatrix} -3/4 & 5/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ e) $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

15. $\left(AB^{-1}\right)^t = \begin{bmatrix} 4/3 & 5 \\ 1/3 & -1 \end{bmatrix}$

16. $12y_{11} - 4y_{12} = 4$

17. Soma $= 4$.

18. Soma $= 2$.

19. a) $\delta = -7$, b) $\delta = 0$

20. Soma $= 5$.

Referências

1 FILHO, E. de A. *Iniciação à Lógica Matemática*. São Paulo, SP, Brasil: Editora Nobel, 2002. 6

2 DAGHLIAN, J. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4. ed. São Paulo, SP, Brasil: Editora Atlas, 2006. 6

3 SOARES, E. *Fundamentos de Lógica: Elementos de Lógica Formal e Teoria da Argumentação*. São Paulo, SP, Brasil: Editora Atlas, 2003. 6

4 FOSSA, J. *Introdução ás técnicas de demonstração na matemática*. 2. ed. São Paulo, SP, Brasil: Editora da Física, 2009. 6

5 VIDIGAL, A. et al. *Fundamentos de Álgebra*. Belo Horizonte, MG, Brasil: Editora UFMG, 2009. 7, 21

6 SANTOS, J. P. de O. *Introdução à Teoria dos Números*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: IMPA, 2009. 7

7 FREITAS, R. de; VIANA, P. *Minicurso de Métodos de Prova*. Londrina, PR, Brasil: II Colóquio de Matemática da Região Sul, Universidade Estadual de Londrina, 2012. Disponível em: <http://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SU-2.08.pdf>. Acesso em: 2 fev. 2016. 7

8 DOXIADIS, A. *Tio Petros e A Conjectura de Goldbach*. [S.l.]: Editora 34, 2001. 8

9 BECKMANN, P. *A History of π*. 3. ed. New York: Barnes & Noble Books, 1983. 25

10 NIVEN, I. *Números: racionais e irracionais*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: Editora SBM, 1984. 25

11 FIGUEIREDO, D. G. de. *Números irracionais e transcendentes*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: Editora SBM, 2002. 25

12 SANTOS, G. L. dos; BRANDAO, J. de O. *O número π: histórico, sua irracionalidade e transcendência*. Brasília, DF, Brasil: Departamento de Matemática, Universidade Católica de Brasília - UCB. Disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/12005/GilvaneideLucenadosSantos.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2016. 25

13 ZAHN, M. *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro*. Londrina, PR, Brasil: Editora Ciência Moderna, 2011. 25

14 BELUSSI, G. M. et al. *Número de ouro*. Londrina, PR, Brasil: Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Londrina, UEL. Disponível em: <http://www.uel.br/cce/mat/geometrica/artigos/ST-15-TC.pdf>. Acesso em: 22 jan. 2016. 25

15 GARCIA, V. C. et al. *O número de ouro como instrumento de aprendizagem significativa no estudo dos números irracionais*. Porto Alegre, RS, Brasil: Instituto de Matemática - UFRGS. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/cultura_matematica_numero_ouro.pdf>. Acesso em: 22 jan. 2016. 25

16 BAHIANO, C. E. N. *Números irracionais e irracionais*. Salvador, Bahia, Brasil: Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia. Disponível em: <http://miltonborba.org/OBMEP/APOST_3-Racin_Irrac.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2016. 25

17 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 7. ed. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: LTC editora, 2002. 49

18 POMMER, W. M. O número de euler: Possíveis abordagens no ensino básico. In: *Seminários de Ensino de Matemática*. SEMA–FEUSP, 2010. Disponível em: <https://social.stoa.usp.br/articles/0016/5249/CO_2010_1sem_SEMAFEUSP_O_nA_mero_de_Euler.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2016. 49

19 SANTOS, R. de J. *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~regi/eqdif/iedo.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2016. 49

20 SANTOS, R. de J. *Crescimento Logístico da População do Brasil*. Belo Horizonte, MG, Brasil: Departamento de Matemática - ICEx - UFMG, 2013. Disponível em: <www.mat.ufmg.br/~regi/eqdif/popbrasil.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2016. 49

21 TAVONI, R.; OLIVEIRA, R. Z. G. Os modelos de crescimento populacional de malthus e verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática C.Q.D.*, v. 2, n. 2, p. 1–14, 2013. 49

22 LIMA, E. L. et al. *Perguntas e Respostas - Seção 1*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada) - PAPEM (Programa de Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Médio), 2010. Disponível em: <http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2010>. Acesso em: 2 fev. 2016. 51

23 IBGE. *Brasil em Números*. Rio de Janeiro: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, 2004. 59

24 ÁVILA, G. *Variáveis Complexas e Aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: LTC editora, 2000. 64

25 IEZZI, G. *Fundamentos da matemática elementar, Volume 6: complexos, polinômios, equações*. 7. ed. São Paulo, SP, Brasil: Atual, 2014. 72, 74, 76, 82

26 RUFALO, S. A. C. *Sistemas Lineares, aplicações e uma sequência didática*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade de São Paulo - USP, Instituto de Ciências Matemáticas e Computação, 2005. 124

27 BUENO, H. P. *Álgebra Linear: Um segundo curso*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: Editora SBM, 2006. 140

28 SANTOS, R. de J. *Matrizes, vetores e geometria analítica*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2012. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~regi/gaalt/gaalt1.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2016. 140, 143, 144, 145

29 POOLE, D. *Álgebra Linear*. São Paulo, SP, Brasil: Cengage Learning, 2011. 140

30 BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986. 143, 145

31 LANG, S. *Linear algebra (Undergraduate texts in mathematics)*. 3. ed. New Haven: Springer, 2004. 144

Índice Remissivo