MODELAGEM MATEMÁTICA PARA UMA PROPRIEDADE ARITMÉTICA DA TABUADA DE MULTIPLICAÇÃO DO 9

REIS, Ana Clara dos Santos[1]; SOUZA, Caroline Helena Costa[2]; DOMINGUES, José Sérgio[3]

[1]Estudante do curso de Licenciatura em Matemática do IFMG - *Campus* Formiga, voluntária (PIVIC). E-mail: anasantosreis262@gmail.com
[2] Estudante do curso de Licenciatura em Matemática do IFMG - *Campus* Formiga, voluntária (PIVIC). E-mail: carol.helena04@gmail.com
[3] Professor orientador do IFMG – *Campus* Formiga. E-mail: sergio.domingues@ifmg.edu.br

Resumo: Ao observar os resultados advindos das multiplicações na tabuada do 9, é possível perceber que ao multiplicar os algarismos de 1 a 10 por 9, resulta-se em um número de dois algarismos da forma xy, cujo resultado da soma desses algarismos é sempre igual a 9. Como não foram encontrados trabalhos na literatura referente à justificativa desse fato, o objetivo principal deste trabalho é construir um modelo matemático que permita analisar todos os números de dois algarismos com esta característica e, com isso, demonstrar que apenas os resultados da tabuada do 9 a satisfazem. Para isso, um estudo aprofundado de resultados já conhecidos da Teoria dos Números foi realizado, especialmente os relacionados às Equações Diofantinas Lineares (EDLs). Em seguida, a teoria estudada foi utilizada para efetuar a modelagem matemática e a análise desejadas. Os resultados encontrados demonstraram que os únicos números de dois dígitos, cuja soma dos algarismos é igual a 9, são exatamente os valores obtidos nas multiplicações da tabuada do 9. Como trabalhos futuros espera-se efetuar a generalização dessa modelagem, estudando as multiplicações de algarismos maiores que 10 por 9 e analisando eventuais novas características ainda não relatadas na literatura.

Palavras-chave: Equações Diofantinas Lineares. Modelagem Matemática. Tabuada do 9.

1 INTRODUÇÃO

Por milênios, os seres humanos utilizam a Matemática entre os mais diversos contextos. Concomitante a isso, com o desenvolvimento da Matemática ao longo dos anos até a atualidade, ainda é possível notar que há muitos mistérios que a circundam, sendo alguns de tamanha complexidade abstrata e outros aparentemente simples, como o caso peculiar da tabuada do 9.

Observe que ao se multiplicar os algarismos de 1 a 10 pelo número 9 (considerando $1 \cdot 9 = 09$), obtêm-se um número de dois algarismos xy, que, quando somados tem o resultado sempre igual a 9, conforme se observa na Tabela 1.

Tabela 1 - Tabuada do 9 e a soma dos algarismos dos resultados

Tabuada do 9	Soma dos algarismos: $x + y$
$1 \cdot 9 = 09$	$0 + 9 = 9$
$2 \cdot 9 = 18$	$1 + 8 = 9$

$3 \cdot 9 = 27$	$2 + 7 = 9$
$4 \cdot 9 = 36$	$3 + 6 = 9$
$5 \cdot 9 = 45$	$4 + 5 = 9$
$6 \cdot 9 = 54$	$5 + 4 = 9$
$7 \cdot 9 = 63$	$6 + 3 = 9$
$8 \cdot 9 = 72$	$7 + 2 = 9$
$9 \cdot 9 = 81$	$8 + 1 = 9$
$10 \cdot 9 = 90$	$9 + 0 = 9$

Fonte: Próprios autores, 2022.

Diante disso, o principal objetivo deste trabalho é construir um modelo matemático que permita analisar todos os números de dois algarismos com esta interessante característica, ou seja, números da forma xy, com $0 \leq x \leq 9$ e $0 \leq y \leq 9$, tais que $x + y = 9$, e demonstrar que apenas os resultados da tabuada do 9 a satisfazem. Para tal finalidade, serão utilizados resultados de Teoria dos Números, principalmente os relacionados com EDLs, pois se adequam melhor a proposta almejada, já que a equação $x + y = 9$ é uma EDL de duas variáveis, e, como veremos, é o modelo matemático que representa o problema estudado nesta pesquisa.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

Como se quer que a soma dos algarismos do número xy seja sempre igual a 9, percebe-se que resultados da Teoria dos Números relacionados às EDLs podem ser utilizados no processo de modelagem do problema. Os principais resultados utilizados, e que podem ser encontrados com mais detalhes em Hefez (2016), Santos (2009), Dario (2022), Richit (2021) e Man (2020), são:

Definição 1: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Diz-se que a divide b, e indica-se por $a \mid b$, se existir $t \in \mathbb{Z}$, tal que $b = at$.

Teorema 1 (*Teorema de Bézout*)**:** Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ não simultaneamente nulos, e $mdc(a, b)$ o máximo divisor comum entre eles. Então, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $mdc(a, b) = am + bn$.

Definição 2: Uma Equação Diofantina Linear (EDL) de duas variáveis inteiras, x e y, é toda equação da forma $ax + by = c$, com a, b, $c \in \mathbb{Z}$.

Definição 3: Um par ordenado de inteiros (x_0, y_0) é denominado solução particular da EDL $ax + by = c$ se, e somente se, $ax_0 + by_0 = c$. O conjunto de todos os pares ordenados de soluções da EDL é denominado solução geral.

Teorema 2: Uma EDL $ax + by = c$, possui solução quando $mdc(a, b)|\ c$.

Teorema 3: Quando a EDL $ax + by = c$ for tal que $mdc(a, b) = 1$, sua solução geral será dada pelas equações paramétricas $x = x_0 + bt$ e $y = y_0 - at$, com $t \in \mathbb{Z}$.

Conjuntamente com o entendimento das EDLs de duas variáveis, mais especificamente os métodos de resolução, aplicações e possíveis modelamentos matemáticos, foi possível iniciar a resolução do problema. Primeiramente, usa-se a Definição 2 com o intuito de elaborar uma EDL que modele os resultados da tabuada do 9, originando-se números de dois dígitos xy, cuja soma sempre seja igual a 9. Utiliza-se o Teorema 2 para concluir que a EDL formada possui solução, e na aplicação do Teorema 1, encontra-se a solução particular. Então, resolve-se a EDL, com base no Teorema 3, para determinar a solução geral da equação do modelo, ou seja, todos os valores de x e y que sejam inteiros, não negativos, e que garantam a validade da propriedade, isto é, que $x + y = 9$.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a estruturação de uma proposta que visa elaborar uma EDL de tal forma que, seja válida para o estudo deste caso em que a soma de dois algarismos seja sempre igual a 9, obtemos:

$$x + y = 9 \tag{1}$$

Ao analisar os coeficientes da EDL (1) tem-se que ambos são iguais a 1. Logo $mdc(1,1) = 1$ e 1 | 9, garantindo, pelo Teorema 2, que a EDL (1) possui solução.

Por conseguinte, o Teorema de Bézout garante que $mdc(1,1)$ pode ser reescrito como combinação linear:

$$1r + 1s = 1,\text{ com } r,\ s \in \mathbb{Z}.$$

Ao considerar $r = 1$ e $s = 0$, temos uma solução para essa combinação, pois:

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1. \tag{2}$$

Logo, multiplicando ambos os lados da igualdade (2) por 9, obtêm-se:

$$1 \cdot 9 + 1 \cdot 0$$
$$= 9.$$

A última igualdade permite concluir que $x_0 = 9$ e $y_0 = 0$ formam uma solução particular da EDL (1), pois $9 + 0 = 9$. Então, utilizando essa solução particular e o Teorema 3, obtém-se a solução geral da EDL (1), dada pelo Sistema de Equações Paramétricas (3):

$$\begin{cases} x = 9 + t \\ y = 0 - t \end{cases}, \text{ com } t \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Além disso, como x e y são os algarismos de um número positivo, ambos devem ser não negativos, isto é, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, e não nulos simultaneamente. Aplicando essas condições em ambas as equações do Sistema (3) obtém-se que:

$$9 + t \geq 0 \Rightarrow t \geq -9$$
$$0 - t \geq 0 \Rightarrow t \leq 0$$

Utilizando esses dois intervalos, tem-se que $-9 \leq t \leq 0$, ou seja

$$t \in \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}.$$

Substituindo-se os valores possíveis de t nas equações paramétricas do Sistema (3), obtém-se os valores apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Resultados encontrados após as substituições dos possíveis valores de t

Parametrização (t)	$x = 9 + t$	$y = 0 - t$	Resultado xy	Soma dos algarismos
$t = -9$	$x = 9 + (-9) \rightarrow x = 0$	$y = 0 - (-9) \rightarrow y = 9$	09	$0 + 9 = 9$
$t = -8$	$x = 9 + (-8) \rightarrow x = 1$	$y = 0 - (-8) \rightarrow y = 8$	18	$1 + 8 = 9$
$t = -7$	$x = 9 + (-7) \rightarrow x = 2$	$y = 0 - (-7) \rightarrow y = 7$	27	$2 + 7 = 9$
$t = -6$	$x = 9 + (-6) \rightarrow x = 3$	$y = 0 - (-6) \rightarrow y = 6$	36	$3 + 6 = 9$
$t = -5$	$x = 9 + (-5) \rightarrow x = 4$	$y = 0 - (-5) \rightarrow y = 5$	45	$4 + 5 = 9$
$t = -4$	$x = 9 + (-4) \rightarrow x = 5$	$y = 0 - (-4) \rightarrow y = 4$	54	$5 + 4 = 9$
$t = -3$	$x = 9 + (-3) \rightarrow x = 6$	$y = 0 - (-3) \rightarrow y = 3$	63	$6 + 3 = 9$
$t = -2$	$x = 9 + (-2) \rightarrow x = 7$	$y = 0 - (-2) \rightarrow y = 2$	72	$7 + 2 = 9$
$t = -1$	$x = 9 + (-1) \rightarrow x = 8$	$y = 0 - (-1) \rightarrow y = 1$	81	$8 + 1 = 9$
$t = 0$	$x = 9 + (-0) \rightarrow x = 9$	$y = 0 - (-0) \rightarrow y = 0$	90	$9 + 0 = 9$

Fonte: Próprios autores, 2022.

Os resultados apresentados na Tabela 2 mostram que apenas os valores resultantes da tabuada do 9 possuem a propriedade de que a soma dos seus algarismos é igual a 9.

4 CONCLUSÕES

Pela análise geral dos resultados é possível concluir a eficácia do modelo matemático determinado, que comprova a proposta inicial mencionada neste trabalho, ou seja, que os únicos números de dois algarismos, xy, cuja soma entre eles é igual a 9, são os resultados da tabuada do 9.

Por conseguinte, as investigações realizadas centram-se na perceptível contribuição dessa pesquisa para eventuais possibilidades de conjecturar novas propriedades aritméticas, por meio da generalização dessa propriedade para a multiplicação de números maiores que 10 por 9. Essa generalização e investigação de novas propriedades serão realizados em trabalhos futuros a serem desenvolvidos pelos autores dessa pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Me. Alex Eduardo Andrade Borges, manifestamos o nosso agradecimento pelo interesse na pesquisa, acompanhamento do seu desenvolvimento e valiosas sugestões na elaboração do texto apresentado. Os autores também agradecem à SEPPG do IFMG – *Campus* Formiga, que por meio de edital de Iniciação Científica Voluntária (PIVIC) possibilitou a realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

DARIO, R. P. Equações diofantinas e alocação otimizada de recursos financeiros de pequenos investidores no mercado acionário brasileiro. **REMAT: Revista Eletrônica de Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 8, n. 1, p. e3007, jun. 2022. DOI: 10.35819/remat2022v8i1id5674.

HEFEZ, A. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MAN, Y. K. A forward approach for solving linear Diophantine equation. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**. v. 51, n. 8, p. 1284–1288, 2020. DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1745915.

RICHIT, L. A.; RICHIT, A.; RICHIT, A. Solução particular de equações diofantinas lineares $ax + by = c$ via abordagem por substituição progressiva do algoritmo de Euclides. **ReviSeM: Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, SE, v. 6, n. 3, p. 97–122, 2021. DOI: 10.34179/revisem.v6i3.15046.

SANTOS, J. P. O. **Introdução à Teoria dos Números**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

Como citar este trabalho:

REIS, Ana Clara dos Santos; SOUZA, Caroline Helena Costa; DOMINGUES, José Sérgio. Modelagem matemática para uma propriedade aritmética da tabuada de multiplicação do 9. *In*: SEMINÁRIO DE PESQUISA E INOVAÇÃO (SemPI), V., 2022. Formiga. **Anais eletrônicos** [...]. Formiga: IFMG – *Campus* Formiga, 2022. Disponível em: https://www.formiga.ifmg.edu.br/seminarios/.